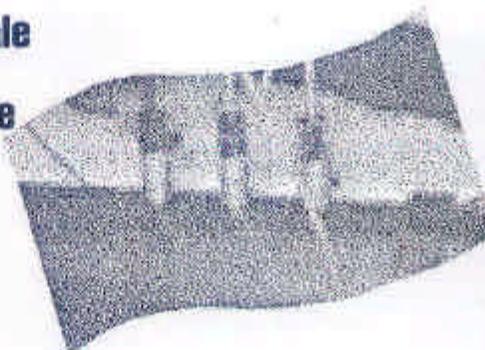


**Étude numérique et expérimentale  
de l'absorption acoustique  
et de la transparence acoustique  
des matériaux poreux  
hétérogènes en basses  
fréquences dans le but  
d'identifier des solutions  
à fort potentiel d'applicabilité**

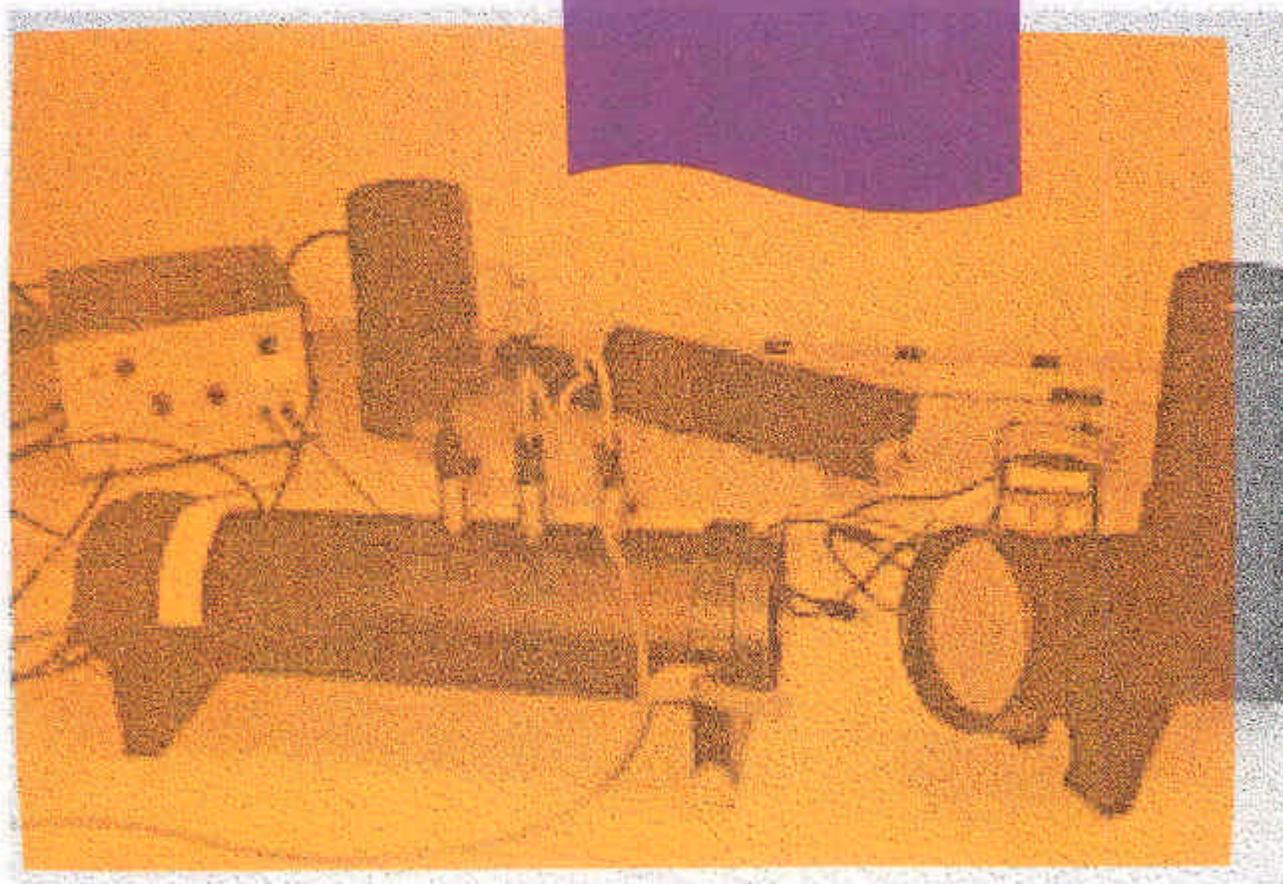


**ÉTUDES ET  
RECHERCHES**

Noureddine Atalla  
Celse H. Amédin  
Raymond Panneton  
Franck Sgard

Novembre 2001 R-278

**RAPPORT**



## La recherche, pour mieux comprendre

L'Institut de recherche Robert-Sauvé en santé et en sécurité du travail (IRSST) est un organisme de recherche scientifique voué à l'identification et à l'élimination à la source des dangers professionnels, et à la réadaptation des travailleurs qui en sont victimes. Financé par la CSST, l'Institut réalise et subventionne des recherches qui visent à réduire les coûts humains et financiers occasionnés par les accidents de travail et les maladies professionnelles.

Pour tout connaître de l'actualité de la recherche menée ou financée par l'IRSST, abonnez-vous gratuitement au magazine *Prévention au travail*, publié conjointement par la CSST et l'Institut, en téléphonant au 1-877-221-7046.

Les résultats des travaux de l'Institut sont présentés dans une série de publications, disponibles sur demande à la Direction des communications ou gratuitement sur le site de l'Institut.

Dépôt légal  
Bibliothèque nationale du Québec  
2001

IRSST - Direction des communications  
505, boul. de Maisonneuve Ouest  
Montréal (Québec)  
H3A 3C2  
Téléphone : (514) 288-1551  
Télécopieur : (514) 288-7636  
[publications@irsst.qc.ca](mailto:publications@irsst.qc.ca)  
[www.irsst.qc.ca](http://www.irsst.qc.ca)  
© Institut de recherche Robert-Sauvé  
en santé et en sécurité du travail  
Novembre 2001.

**Étude numérique et expérimentale  
de l'absorption acoustique  
et de la transparence acoustique  
des matériaux poreux  
hétérogènes en basses  
fréquences dans le but  
d'identifier des solutions  
à fort potentiel d'applicabilité**

Noureddine Atalla  
Celse H. Amédin  
Raymond Panneton  
Franck Sgard

# ÉTUDES ET RECHERCHES

**RAPPORT**

Cliquez recherche  
[www.irsst.qc.ca](http://www.irsst.qc.ca)



Cette publication est disponible  
en version PDF  
sur le site internet de l'IRSST.

Cette étude a été financée par l'IRSST. Les conclusions et recommandations sont celles de l'auteur.

## SOMMAIRE

De par les niveaux élevés ainsi que le nombre de travailleurs concernés, les problèmes du bruit produit par les machines sont extrêmement importants et fort complexes. Tous les secteurs sont concernés : fabrication, forage, transport, bâtiment, manufacturier, etc. L'utilisation de dispositifs absorbants acoustiques constitue un moyen de réduire ces niveaux de bruit. Parmi ces dispositifs, on distingue les systèmes passifs dissipatifs qui consistent à placer un matériau absorbant sur le trajet de l'onde à absorber. Ces dispositifs passifs dissipatifs sont constitués essentiellement de matériaux poreux classiques (laines, mousses). Ils s'avèrent efficaces en hautes et moyennes fréquences mais très peu performants dans le domaine des basses fréquences, là où l'énergie émise par les sources peut être relativement importante. De plus, la nécessité de solutions compatibles avec les contraintes de poids, d'épaisseur et de coûts, et l'absence de modèles réalistes basses fréquences simulant finement le comportement vibroacoustique des matériaux poroélastiques ont fait que les solutions connues et disponibles actuellement ne permettent pas d'agir sur les basses fréquences. Par conséquent, le développement de nouveaux matériaux à haut pouvoir de dissipation acoustique en basse fréquence s'impose.

**L'objectif principal** de ce projet est de comprendre les mécanismes régissant l'absorption acoustique et la transparence acoustique des matériaux poreux en basses fréquences afin de pouvoir identifier et tester des solutions à fort potentiel d'applicabilité. L'idée est de tester l'effet d'hétérogénéités dans le matériau poreux sur le comportement en absorption et en transmission du matériau. Ces hétérogénéités peuvent être des cavités d'air, des matériaux poreux de nature différente ou des inclusions solides légères. Il s'agit donc de comprendre les mécanismes régissant l'absorption et la transmission acoustique, en basse fréquence, des matériaux poreux hétérogènes afin d'identifier et de tester des solutions à fort potentiel d'applicabilité.

Pour répondre à cet objectif, un modèle numérique a été développé pour simuler le comportement vibratoire et acoustique des matériaux poreux hétérogènes dans un guide d'onde en basses fréquences. Le modèle est basé sur une approche par éléments finis pour les matériaux poroélastiques hétérogènes et sur une approche modale pour la description du champ acoustique dans le guide d'onde. Il permet d'étudier l'effet des hétérogénéités sur le comportement en absorption et en transmission des matériaux poreux. Cependant, étant donné la complexité du problème, les travaux effectués à l'occasion de ce projet se sont surtout concentrés sur l'aspect **absorption acoustique**. Le comportement en transmission des matériaux poreux hétérogènes (matériaux phono-isolants), bien qu'amorcé, n'a pas encore fait l'objet d'études expérimentales et numériques.

Pour l'étude de l'absorption, l'outil numérique a été validé par rapport à des mesures expérimentales sur une série de configurations hétérogènes ainsi que par rapport aux travaux théoriques et expérimentaux effectués récemment sur les matériaux à double porosité (matériaux poreux macroperforés) de la littérature. L'excellent accord entre mesures et résultats numériques démontre la fiabilité et la robustesse du modèle développé.

Ce modèle a permis d'analyser l'effet d'hétérogénéités sur l'absorption et la transmission acoustique des matériaux poreux. Plusieurs solutions ont été ainsi testées. Il apparaît que la

solution consistant à combiner des matériaux poreux de résistivité très différente permet d'atteindre des gains importants pour l'absorption en basses fréquences. En outre, la solution consistant à macroperforer un matériau poreux hautement résistif fournit une solution très efficace et facile à mettre en œuvre. Le pourcentage d'hétérogénéités, leur taille et leur forme sont des paramètres essentiels de conception. Leur importance est étudiée dans ce rapport. L'emphase est mise sur les matériaux poreux macroperforés ou matériaux à double porosité.

Sur le plan technologique, le code développé permet d'envisager une aide importante à la conception de nouveaux matériaux basés sur le principe d'addition d'hétérogénéités et possédant des propriétés d'absorption élevées en basses fréquences. Sur le plan scientifique, une formulation originale alliant éléments finis et approche modale a permis de simuler les conditions d'expérimentation (tube de Kundt) avec une grande fidélité. Ce travail a donné lieu à plusieurs publications dans des journaux scientifiques ou des congrès de renommée internationale.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>Sommaire .....</b>	<b>i</b>
<b>Table des matières .....</b>	<b>iii</b>
<b>Liste des figures .....</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux .....</b>	<b>vi</b>
<b>Introduction .....</b>	<b>1</b>
<b>I Rappel des objectifs de recherche.....</b>	<b>1</b>
I.1 Objectif principal.....	1
I.2 Objectifs spécifiques .....	1
<b>II Formulation théorique du problème .....</b>	<b>2</b>
II.1 État de l'art .....	2
II.2 Modélisation du poreux hétérogène .....	3
II.3 Modélisation du guide d'onde.....	6
<b>III Implantation numérique.....</b>	<b>7</b>
III.1 Description du logiciel .....	7
III.2 À propos de la convergence du modèle.....	8
<b>IV Validations expérimentales.....</b>	<b>9</b>
<b>V Étude numérique de l'influence des hétérogénéités sur l'absorption acoustique .....</b>	<b>14</b>
V.1 Influence de la macro-porosité .....	15
V.2 Influence de la taille des perforations.....	18
V.3 Influence de la distribution des macro-pores.....	19
V.4 Influence du profil des macro-pores.....	20
V.5 Influence de la résistivité des matériaux à double porosité .....	22
V.6 Macro-pores remplis de matériau poreux.....	23
V.7 Absorption d'un matériau poreux non homogène.....	25
<b>VI Résultats expérimentaux sur l'absorption acoustique.....</b>	<b>26</b>
VI.1 Matériau A ( $\sigma = 5877 \text{ Ns/m}^4$ ) .....	27
VI.2 Matériau B ( $\sigma = 50485 \text{ Ns/m}^4$ ) .....	28
VI.3 Matériau C ( $\sigma = 62320 \text{ Ns/m}^4$ ) .....	31
VI.4 Matériau D ( $\sigma = 72717 \text{ Ns/m}^4$ ) .....	32
<b>Conclusion.....</b>	<b>35</b>
<b>Références .....</b>	<b>37</b>
<b>ANNEXE A : Équations de la poroélasticité de Biot-Allard-Johnson .....</b>	<b>39</b>
<b>ANNEXE B : Formulation faible <math>\{u,p\}</math> par éléments finis des équations de Biot-Allard-Johnson.....</b>	<b>40</b>
<b>ANNEXE C : Formulation faible par éléments finis d'un milieu fluide et d'un milieu solide .....</b>	<b>43</b>

<b>ANNEXE D : Couplage entre un matériau poroélastique et des hétérogénéités de nature fluide, solide et poroélastique .....</b>	<b>44</b>
<b>ANNEXE E : Modélisation d'un matériau poreux dans un guide d'onde.....</b>	<b>46</b>
<b>ANNEXE F : Calcul des indicateurs vibro-acoustiques .....</b>	<b>48</b>

## LISTE DES FIGURES

Figure 1 : Configuration en absorption .....	4
Figure 2 : Configuration en transmission .....	5
Figure 3 : Organigramme du logiciel poropatch .....	8
Figure 4 : Matériau à double porosité .....	9
Figure 5 : Exemple de réalisation d'un matériau à double porosité (laine macroperforée) .....	10
Figure 6 : Comparaison entre les prédictions (en trait plein) et les mesures (en pointillés) pour une laine de roche à double porosité : (a) 5.75 cm d'épaisseur, (b) 11.5 cm d'épaisseur... 11	11
Figure 7 : Effets des modes évanescent sur le coefficient d'absorption : .....	12
Figure 8 : Comparaison entre les mesures et les prédictions de l'impédance de surface moyenne. ....	13
Figure 9 : Comparaison entre l'approche de Biot et l'approche fluide équivalent.....	13
Figure 10 : Configurations étudiées et macro-porosités correspondantes.....	16
Figure 11 : Effets de la macro-porosité sur le coefficient d'absorption. ....	17
Figure 12 : Effets des mécanismes de dissipation thermique et visqueux sur le coefficient d'absorption pour diverses macro-porosités et $a = 2.83$ cm.....	17
Figure 13 : Configurations étudiées .....	18
Figure 14 : Effets des tailles de perforation sur le coefficient d'absorption ( $\phi_p = 0.11$ ) .....	18
Figure 15 : Configurations étudiées .....	19
Figure 16 : Effets de la distribution des macro-pores sur le coefficient d'absorption ( $\phi_p = 0.18$ ) .....	20
Figure 17 : Configurations étudiées des profils de perforations.....	21
Figure 18 : Comparaison des coefficients d'absorption obtenus pour pour les différentes configurations de profils de trous ( $\phi_p = 0.14$ ).....	21
Figure 19 : Influence de la résistivité du matériau micro-poreux sur le coefficient d'absorption.....	22
Figure 20 : Comparaison entre le matériau homogène et le matériau à double porosité ( $\phi_p = 0.11$ ) pour : (a) $\sigma_3 = 20$ kNm <sup>-4</sup> s (b) $\sigma_4 = 400$ kNm <sup>-4</sup> s.....	23
Figure 21 : Effets du contraste des résistivités sur le coefficient d'absorption lorsque les trous sont remplis avec un matériau poreux .....	24
Figure 22 : Comparaison entre un matériau à deux couches et un matériau non homogène équivalent .....	25
Figure 23 : Dispositif expérimental utilisé pour les mesures .....	26
Figure 24 : Description des macroperforations utilisées .....	27
Figure 25 : Photo des échantillons testés .....	27
Figure 26 : Coefficients d'absorption expérimentaux du matériau A à simple et double porosité.....	28
Figure 27 : Photo des échantillons testés .....	29
Figure 28 : Configurations étudiées (matériau en jaune, trou en blanc, mur rigide en noir).....	29
Figure 29 : Coefficients d'absorption expérimentaux des échantillons d'épaisseur 37.44 mm....	30
Figure 30 : Coefficients d'absorption expérimentaux des échantillons d'épaisseur 74.88 mm pour chacune des configurations étudiées .....	30
Figure 31 : Photo des échantillons testés .....	31
Figure 32 : Coefficients d'absorption expérimentaux des échantillons d'épaisseur 19.5 mm.....	31
Figure 33 : Photo des échantillons testés .....	32
Figure 34 : Coefficients d'absorption expérimentaux des échantillons d'épaisseur 50.53 mm....	32
Figure 35 : Échantillon à macroporosité "aléatoire" .....	33

Figure 36 : Influence du profil des macroporations sur les coefficients d'absorption  
expérimentaux ..... 33

### **LISTE DES TABLEAUX**

Tableau 1 . Propriétés acoustiques de la laine de roche ..... 10  
Tableau 2 . Propriétés acoustiques de la laine de verre rigide..... 24

# INTRODUCTION

Ce rapport présente une synthèse des travaux qui ont été réalisés dans le cadre du projet "Étude numérique et expérimentale de l'absorption acoustique et de la transparence acoustique des matériaux poreux hétérogènes en basses fréquences dans le but d'identifier des solutions à fort potentiel d'applicabilité". Le rapport fait d'abord un rappel des objectifs de recherche qui ont été proposés dans la demande de soumission du projet. La section suivante est consacrée à la description des modèles théoriques qui ont été développés. La troisième section a trait à l'implantation numérique des modèles. Une autre section rend compte des tests expérimentaux qui ont été effectués pour valider les modèles. Finalement, deux autres sections rendent compte des études paramétriques effectuées et des résultats expérimentaux obtenus avec les modèles.

## I RAPPEL DES OBJECTIFS DE RECHERCHE

### I.1 Objectif principal

L'objectif principal défini dans la demande de subvention est de **comprendre les mécanismes régissant l'absorption acoustique et la transparence acoustique des matériaux poreux en basses fréquences afin de pouvoir identifier et tester des solutions à fort potentiel d'applicabilité.**

### I.2 Objectifs spécifiques

Le projet s'articule autour des objectifs spécifiques suivants :

- Développement d'un modèle numérique du comportement vibroacoustique des matériaux poreux hétérogènes en basses fréquences
- Tests de différentes pistes d'optimisation de l'absorption acoustique des matériaux hétérogènes
- Tests de différentes pistes d'optimisation de la transparence acoustique des matériaux hétérogènes
- Mise au point de nouveaux matériaux et mesures expérimentales

La finalité des développements sur la modélisation des matériaux poreux hétérogènes en basses fréquences est de permettre la modélisation numérique de structures hétérogènes composées d'un assemblage tridimensionnel de matériaux élastiques (plaque, membrane, inclusion solide, etc.), de matériaux poroélastiques (mousse, fibre de verre, etc.) et de milieux fluides (air).

## II FORMULATION THÉORIQUE DU PROBLÈME

### II.1 État de l'art

Un matériau poreux est un matériau diphasique constitué d'une phase solide appelée squelette et d'une phase fluide (de l'air dans notre cas) contenue dans les pores. Ces matériaux poreux sont utilisés dans de nombreuses applications industrielles, du bâtiment ou des transports afin d'amortir des vibrations ou d'absorber des ondes acoustiques. Il existe plusieurs modèles de matériaux poreux incluant divers niveaux de précision et nombres de paramètres. Le modèle le plus utilisé pour les matériaux isotropes est le modèle à 9 paramètres de Biot-Allard-Johnson. Ces paramètres sont communément subdivisés en 2 classes; -les paramètres acoustiques : la porosité, la résistance au passage de l'air, la tortuosité, les longueurs caractéristiques visqueuses et thermiques; les paramètres mécaniques : la masse volumique, le module d'Young, le coefficient de Poisson et le facteur de perte. L'annexe A présente un résumé de la théorie de Biot-Allard-Johnson puisque nous adoptons ce modèle dans le cadre de ce projet.

Pour augmenter l'absorption acoustique ou diminuer la transparence acoustique de structures à parois multiples (murs, portes, capotages, fuselages, etc.) des matériaux poreux absorbants sont adjoints à ces dernières (Bell et Bell, 1994). En hautes fréquences, pour caractériser leur efficacité à isoler et à absorber le bruit, la loi de masse et des modèles analytiques (par exemple, Transfer Matrix Method: TMM) – basés sur des structures à dimensions latérales infinies – sont généralement utilisés (Allard, 1993 ; Bell et Bell, 1994). En basses fréquences, là où la finitude du milieu est importante et le comportement modal apparent, ces formulations sont inadaptées. Notons également que dans le domaine des hautes fréquences et pour les problèmes d'absorption, la théorie complète de Biot peut être remplacée par un modèle plus simple où le squelette du matériau est supposé immobile et le milieu poreux assimilé à un fluide équivalent. Cette approximation est également valide pour les problèmes de transmission où le matériau poreux n'est pas collé aux parements qui l'entourent. Dans le cas général (en particulier pour les problèmes où le matériau est en contact avec une structure vibrante), ce modèle fournit des résultats erronés et la théorie complète de Biot doit être utilisée. Pour pallier ces insuffisances, des modèles d'éléments finis ont ainsi été récemment développés pour simuler l'absorption et la transparence des structures multicouches avec matériaux poreux dans le domaine des basses fréquences (Panneton et Atalla, 1996, 1997a, 1997b, 1998 ; Gorog et coll., 1998 ; Panneton, 1996 ; Kang et Bolton, 1996 ; Coyette et Wynendaele, 1995 ; Atalla et Panneton, 1996).

Les travaux publiés jusqu'à maintenant portent sur la modélisation et la simulation vibroacoustique de matériaux poreux homogènes et isotropes utilisés seuls ou dans des structures multicouches. L'expérience et les simulations montrent que ces matériaux traditionnels donnent de bons résultats en hautes et moyennes fréquences, mais des résultats médiocres en basses fréquences. Peu d'études portent sur l'optimisation des propriétés absorbantes et de transmission acoustique en basses fréquences des structures multicouches incluant des matériaux acoustiques absorbants.

À partir de ces modèles de dissipation et des modèles de propagation dans les milieux poreux (Biot, 1956 ; Allard, 1993), les demandeurs ont développé des modèles d'éléments finis pour des matériaux à structure élastique, rigide et souple (Panneton et Atalla, 1998, 1997a, 1997b, 1996 ; Atalla et Panneton, 1996; Atalla et coll., 1998). Ces modèles autorisent la simulation fine du comportement vibroacoustique de matériaux poreux homogènes isotropes et ont été validés avec succès par comparaison avec des mesures d'absorption et de vibration en laboratoire (Panneton, 1996; Debergue, 1997; Rigobert 2001).

L'utilisation d'hétérogénéités pour augmenter l'absorption ou diminuer la transparence acoustique des systèmes impliquant des matériaux poreux n'a fait l'objet que d'un nombre restreint de travaux. Atalla et al. (Atalla, 1996) ont développé une approche générale basée sur une représentation non propagative du champ acoustique dans une couche poreuse pour prédire l'impédance acoustique de surface en basses fréquences de matériaux poreux hétérogènes de faible épaisseur. Ils ont comparé cette approche avec une description par éléments finis du matériau poreux hétérogène et ont conclu à la non importance des effets propagatifs sur l'absorption acoustique des couches poreuses hétérogènes minces. Cependant, leur modèle est approché et néglige l'interaction entre les différentes hétérogénéités. Auriault et al (Auriault, 1994), Boutin et al (Boutin, 1998), sont à l'origine des premières études sur l'acoustique des milieux à double porosité (milieux poreux comportant deux échelles distinctes de pores (pores et micropores)). À partir de techniques d'homogénéisation, ces auteurs ont montré que le comportement macroscopique de tels milieux dépendait fortement du rapport d'échelles des tailles de pores. Ces travaux ont été entrepris dans le cadre d'applications géotechniques. Plus récemment, Olny et al (Olny, 1999) se sont intéressés aux applications acoustiques des milieux à double porosité constitués de poreux macroporés. Ces auteurs ont étendu à la fois théoriquement et expérimentalement les travaux de Boutin et ont montré que le comportement macroscopique de tels milieux dépend du contraste de perméabilités entre les pores (trous) et les micro-pores (pores du milieu poreux). En particulier, pour de forts contrastes, le coefficient d'absorption peut être considérablement augmenté en basses fréquences. La zone d'absorption maximale est contrôlée par le pourcentage de trous, la taille des trous et leur forme. Cependant, le modèle analytique développé par Olny est limité aux matériaux poreux à structure rigide d'extension latérale infinie, aux macropores remplis d'air et au problème d'absorption. De plus, il ne donne accès qu'aux grandeurs macroscopiques (impédance de surface, coefficient d'absorption) et ne permet pas de connaître le comportement des champs à l'intérieur du matériau. Le modèle proposé ici et qui est décrit ci-dessous s'affranchit de toutes ces limitations (Atalla et coll., 2000a, Amédin et coll., 2000). Il est à noter par ailleurs, que des résultats sur la transmission à travers des poreux hétérogènes sont, à notre connaissance, inexistantes.

## **II.2 Modélisation du poreux hétérogène**

La géométrie du problème est décrite sur la figure 1 pour l'aspect absorption et sur la figure 2 pour l'aspect transmission. Pour la configuration en absorption, le matériau est placé au fond d'un guide d'onde rectangulaire semi-infini (soit collé, soit accoté) et excité par une onde plane provenant d'un haut-parleur. On s'intéresse alors à la part d'énergie absorbée par le matériau c'est-à-dire à la part de l'énergie non réfléchi. Pour la configuration en transmission, le matériau

est placé dans le guide d'onde infini<sup>1</sup> et excité d'un côté par une onde plane. On s'intéresse dans ce cas à ce qui est transmis par le matériau dans le milieu récepteur.

Afin de tenir compte de la complexité tridimensionnelle du modèle et de ses composantes, nous proposons une méthode numérique basée sur la méthode des éléments finis. Le matériau poreux hétérogène est supposé composé de pièces (*patches*) de matériaux poreux homogènes et isotropes (figures 1 et 2) poroélastiques, éventuellement combinés à des *patches* fluides ou solides. Les hétérogénéités ou *patches* sont donc d'ordre macroscopique. Le nombre, la dimension, la position, la forme et les propriétés physiques des *patches* sont considérés comme paramètres du modèle.

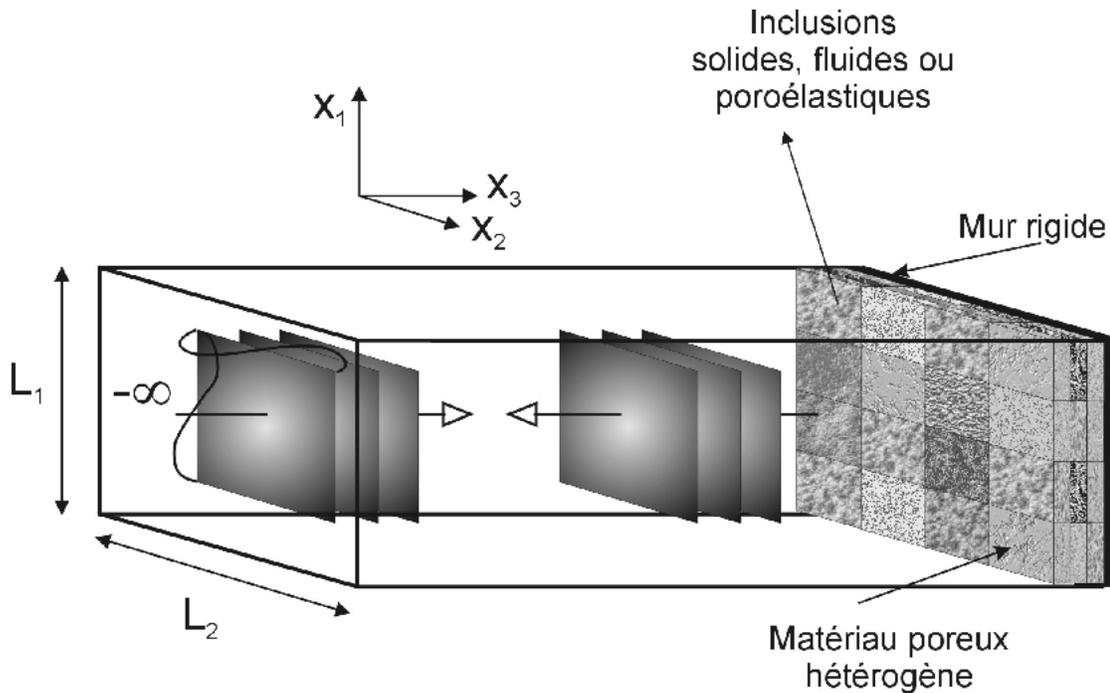


Figure 1 : Configuration en absorption

---

<sup>1</sup> Le guide d'onde infini permet de simuler une terminaison anéchoïque qui est utilisée dans la pratique pour les mesures. La terminaison anéchoïque est utilisée pour éviter qu'il n'y ait d'onde réfléchie par l'extrémité du guide d'onde.

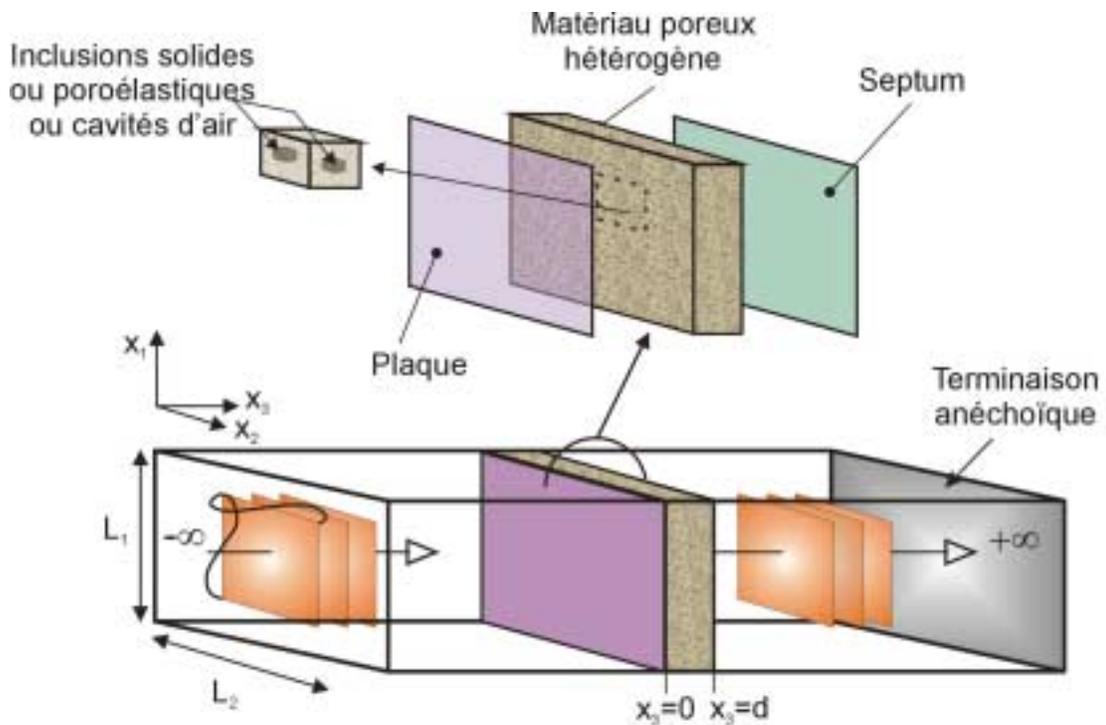


Figure 2 : Configuration en transmission

La modélisation de chaque *patch* est basée sur la théorie de la poroélasticité de Biot. La formulation mixte  $(u,p)$  des équations de la poroélasticité, récemment développée par les auteurs, est utilisée. Cette formulation permet de reformuler les équations en déplacement  $\{u,U\}$  de Biot en termes du vecteur déplacement associé à un squelette viscoélastique équivalent et de la pression dans un fluide compressible saturant l'espace interstitiel. Ce faisant, la formulation  $\{u,p\}$  permet la réécriture du système dynamique du problème de la poroélasticité sous la forme classique d'un problème de couplage fluide-structure. Qui plus est, la formulation mixte conduit à un système matriciel de petite taille (quatre degrés de liberté par noeud au lieu de six dans la formulation  $\{u-U\}$ ) autorisant ainsi un gain important en temps de calcul. Plus important, la formulation mixte permet de tenir compte automatiquement, via la procédure d'assemblage, du couplage entre différents matériaux poroélastiques, facilitant ainsi l'assemblage du matériau hétérogène à partir de différentes pièces. Ceci représente un avantage par rapport à la formulation classique en déplacement. Cependant, pour des distributions quelconques de *patches* (solides, fluides ou poroélastiques) dans le matériau poreux, la gestion du calcul des termes de couplage peut représenter une difficulté importante au niveau informatique. L'idée est donc de s'affranchir du calcul de ces termes de couplage en utilisant une formulation  $\{u,p\}$  adaptée selon le type d'hétérogénéité considérée (fluide, solide ou poroélastique), comme illustré dans les annexes B et D. L'annexe C rappelle aussi brièvement les formulations faibles associées aux milieux acoustiques et solides.

Il faut noter que les formulations développées sont générales. C'est seulement dans le but d'éliminer des sources d'erreur et de s'affranchir du problème encore ouvert du calcul de

l'impédance de rayonnement d'un matériau poreux, qu'il a été décidé de limiter l'étude aux configurations représentées sur les figures 1 et 2.

### **II.3 Modélisation du guide d'onde**

Etant donné la forme géométrique simple du guide d'onde, le choix a été fait d'utiliser une approche modale pour décrire le champ acoustique qui y règne à l'intérieur. L'avantage de cette approche par rapport à une méthode d'éléments finis est qu'on évite la discrétisation du volume du guide d'onde et la prise en compte de conditions aux limites de type d'impédance aux extrémités du guide. De ce fait, on n'introduit pas de degrés de liberté supplémentaires dans le système à résoudre et on tient compte de la présence du guide d'onde de façon exacte (à travers l'impédance de rayonnement).

Dans le modèle développé, la pression acoustique dans le guide d'onde est écrite sous la forme d'une somme de la pression acoustique rayonnée par le matériau et une pression réfléchie bloquée. La pression acoustique rayonnée est ensuite décomposée en une somme de modes propagatifs et évanescents d'amplitudes inconnues. Les amplitudes de ces modes sont obtenues à partir d'une formulation faible des équations de continuité de la pression acoustique dans le guide et de la pression interstitielle dans le cas du couplage avec un poreux ou un milieu acoustique. Dans le cas où le guide d'onde est en contact avec un matériau élastique, on utilise une formulation faible des équations de continuité des déplacements normaux acoustique et structural. L'annexe E expose en détails la théorie associée. Dans le cas du couplage entre le guide d'onde et un matériau poreux (ou un fluide), les amplitudes modales sont exprimées en terme de la pression interstitielle à la surface du poreux. L'effet du guide d'onde est alors équivalent à une matrice d'admittance qui se rajoute sur les degrés de liberté en pression à la surface du matériau. Dans le cas du couplage entre le guide d'onde et une structure élastique, les amplitudes inconnues des modes s'expriment en fonction du déplacement structural normal à la surface de la structure élastique. L'effet du guide d'onde est alors équivalent à une matrice d'impédance qui se rajoute sur les degrés de liberté en déplacement normal à la surface du matériau. Notons finalement que les méthodes classiques de calcul des indicateurs acoustiques (impédance moyenne de surface, coefficient de réflexion) perdent de leur sens dans le cas de matériaux hétérogènes. Une méthode physique et originale basée sur le bilan des puissances actives et réactives du système est développée dans le présent travail (Annexe E).

#### III.1 Description du logiciel

Cette section décrit la mise en œuvre numérique du logiciel développé, appelé poropatch. Cet outil permet de prédire les indicateurs d'absorption (impédance, coefficient d'absorption, puissances dissipées) et de transmission (perte par transmission) de structures multicouches constituées de plaque élastique, de septa, de milieux acoustiques, de milieux solides et de matériaux poreux hétérogènes, placées dans un guide d'onde.

Les paramètres du logiciel sont les suivants :

- Dimensions latérales selon  $x$  et  $y$  du guide d'onde.
- Epaisseur de chaque couche de matériau.
- Maillage latéral (nombre de nœuds), identique pour chaque couche de matériau.
- Maillage dans l'épaisseur (nombre de nœuds) pour les éléments volumiques tels que le poreux, le fluide équivalent, le milieu acoustique ou le solide.
- Type d'éléments finis utilisé pour résoudre le problème dans chaque couche (type de formulation, topologie de l'élément).
- Fichier de configuration décrivant la position des hétérogénéités et leur nature (poroélastique, solide ou acoustique) ainsi que leurs propriétés physiques (9 paramètres pour le poreux; masse volumique, module d'Young, coefficient de Poisson, amortissement structural pour le solide et masse volumique, vitesse du son et amortissement structural pour le milieu acoustique).
- Caractéristiques du mode excitateur (amplitude, ordre  $m$  selon  $x$  et  $n$  selon  $y$ ). Dans cette étude, on considère une excitation par mode plan, i.e  $(m,n)=(0,0)$ .
- Nombre de modes utilisés pour approcher la pression rayonnée par le matériau en contact avec le guide d'onde.
- Indicateurs vibroacoustiques à calculer (impédance moyenne, coefficient d'absorption, puissances dissipées, perte par transmission)

La figure 3 montre l'organigramme du logiciel développé.

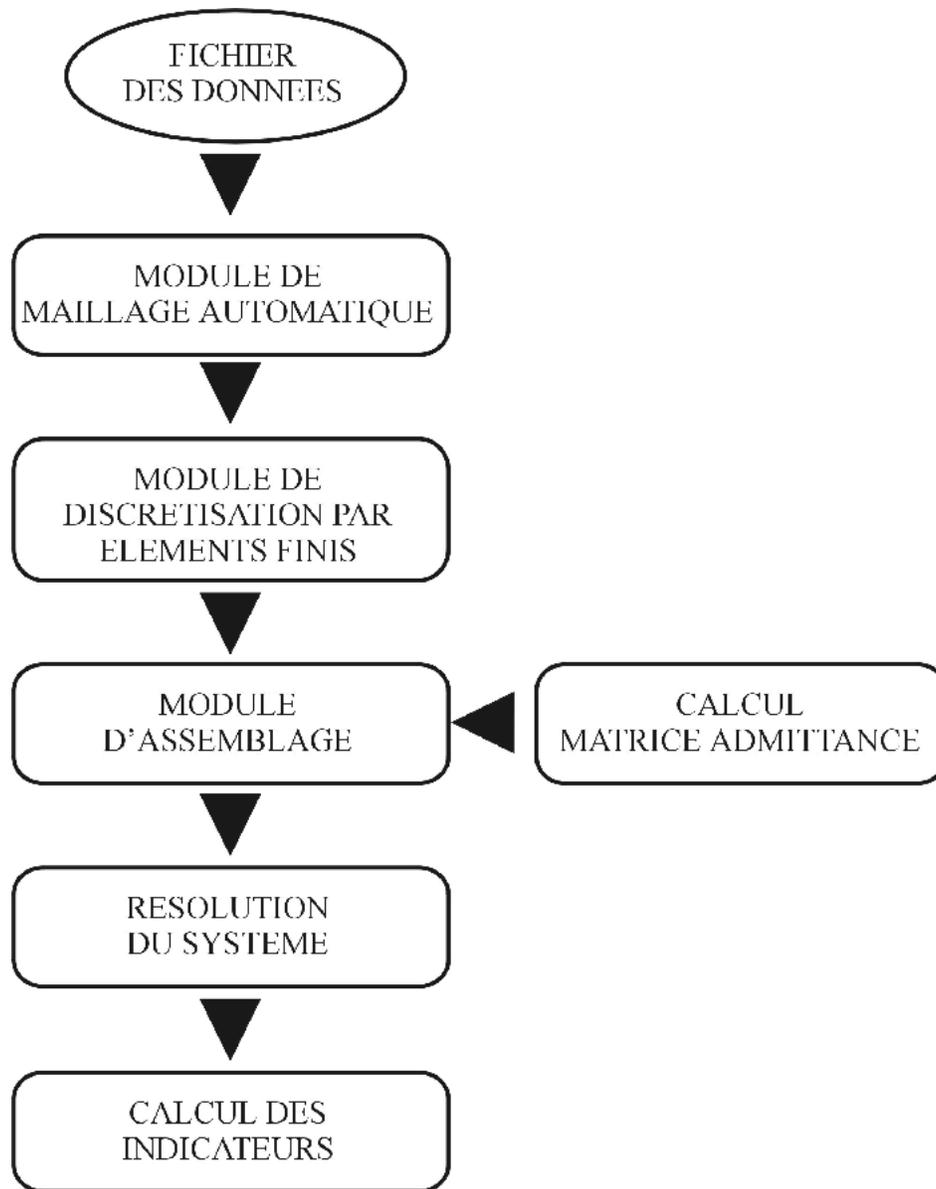


Figure 3 : Organigramme du logiciel poropatch

### III.2 À propos de la convergence du modèle

Dans le cas de matériaux hétérogènes, on doit s'assurer que le nombre de modes du guide d'onde utilisé dans l'expansion modale est suffisant pour permettre la convergence. Dans le cas des matériaux homogènes, un seul mode (mode plan) est généralement suffisant, mais la présence d'hétérogénéités nécessite la prise en compte de modes d'ordre supérieur, éventuellement évanescents. L'importance des modes d'ordre supérieur dans le cas de configurations impliquant des matériaux hétérogènes est soulignée dans la section 3.4.

## IV VALIDATIONS EXPÉRIMENTALES

Dans toute cette section ainsi que dans la suivante, on utilise le modèle fluide équivalent pour la description du matériau poroélastique. La méthode présentée a été d'abord validée par une comparaison avec les milieux poreux homogènes. Ensuite, une validation expérimentale a été effectuée dans le cas d'un matériau à double porosité qui était constitué d'une laine de roche avec des perforations périodiques contenant de l'air (et appelées macro-pores). Un tel matériau correspond à un matériau à *double porosité*. La porosité de la laine et celle associée aux perforations sont respectivement désignées par la micro-porosité  $\phi_m$  et la macro-porosité  $\phi_p$ . La configuration étudiée est illustrée sur la figure 4. Elle consiste en un treillis périodique composé de cellules génériques. La cellule générique consiste en un échantillon carré de laine de roche, de dimensions  $L \times L$ , dans lequel il y a un trou carré au centre, de dimension  $a \times a$ . la macro-porosité correspondante  $\phi_p$  est donnée par :

$$\phi_p = \frac{a^2}{L^2} \quad (1)$$

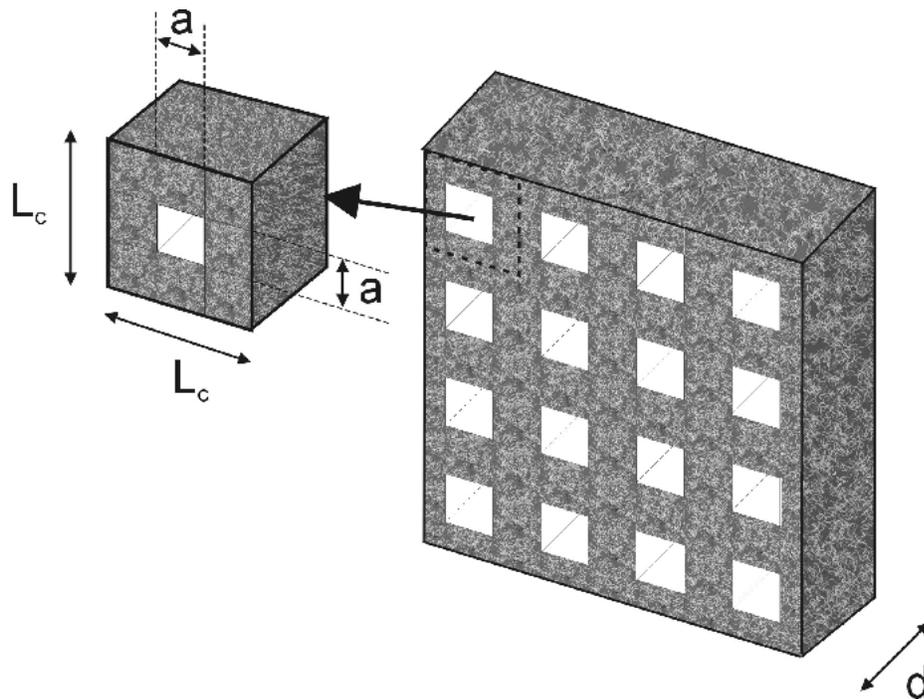


Figure 4 : Matériau à double porosité

La figure 5 présente un exemple de réalisation de matériau à double porosité.

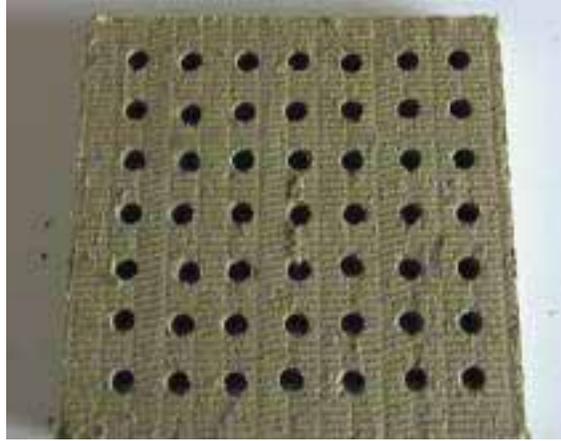


Figure 5 : Exemple de réalisation d'un matériau à double porosité (laine macroperforée)

Les propriétés acoustiques de la laine de roche sont données dans le tableau 1. Les mesures ont été effectuées dans un tube de Kundt de section carrée  $0.085 \times 0.085 \text{ m}^2$ . Une méthode de fonction de transfert d'un microphone a servi à déterminer les impédances acoustiques normales de surface des échantillons, qui étaient excités par un signal sinusoïdal pseudo-aléatoire. Étant donné la section du tube, les échantillons testés représentent un volume élémentaire du milieu périodique à double porosité. Dans le cas d'une incidence normale, la symétrie permet de réduire l'étude du système représenté sur la figure 4 à une cellule. À la frontière entre deux cellules, en effet, les composantes de vitesse perpendiculaires à la frontière sont nulles.

<b>Matériau 1 : Laine de roche</b>	
Résistance à l'écoulement	$\sigma_m = 135000 \text{ Nm}^{-4}\text{s}$
Porosité	$\phi_m = 0,94$
Tortuosité	$\alpha_\infty = 2,1$
Longueur caractéristique visqueuse	$\Lambda = 49 \cdot 10^{-6}\text{m}$
Longueur caractéristique thermique	$\Lambda' = 166 \cdot 10^{-6}\text{m}$
Coeff. de Poisson	$\nu = 0$
Module d'Young	$E = 4400000 \text{ Pa}$
Facteur de perte	$\eta = 0,1$
Masse volumique de la phase solide	$\rho_1 = 130 \text{ kg/m}^3$

Tableau 1 . Propriétés acoustiques de la laine de roche

Le champ de pression sur la face de la cellule est donné par :

$$p(x_1, x_2, 0) = \sum_{m,n} C_{mn} \cos\left(\frac{2\pi m}{L_1} x_1\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{L_2} x_2\right) \quad (2)$$

car dans le cas spécial symétrique, les modes d'indice impair ne sont pas excités. Dans les résultats numériques à venir, le nombre de modes gardés et la correspondance latérale du maillage ont été vérifiés pour la convergence.

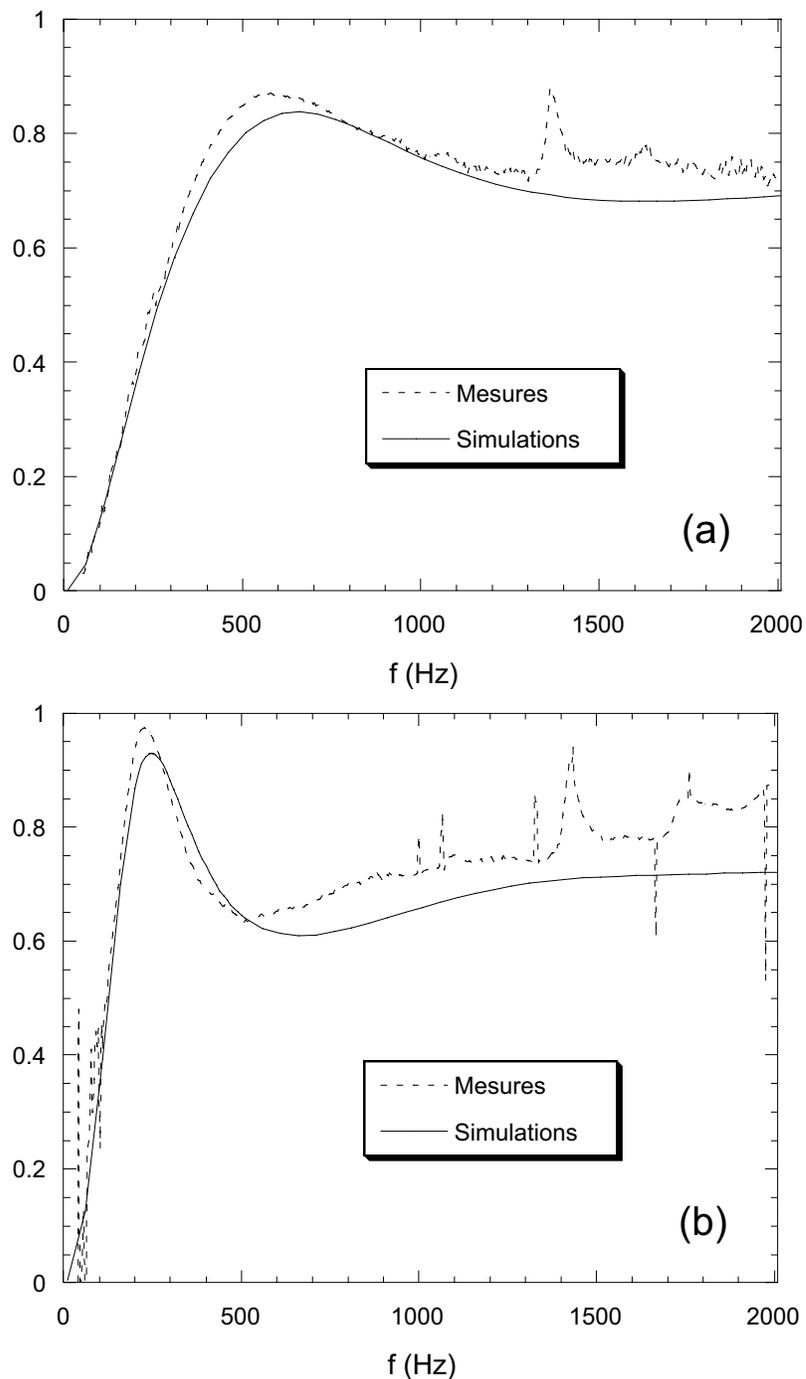


Figure 6 : Comparaison entre les prédictions (en trait plein) et les mesures (en pointillés) pour une laine de roche à double porosité : (a) 5.75 cm d'épaisseur, (b) 11.5 cm d'épaisseur.

La figure 6 illustre la comparaison entre la simulation et les mesures, pour deux épaisseurs : (a) 5.75 cm et (b) 11.5 cm. Un excellent accord est observé, ce qui prouve la validité de la méthode et en augmente le niveau de confiance. Pour mettre en évidence l'importance des modes évanescents, la figure 7 illustre le nombre de modes évanescents qui doivent être gardés pour atteindre la convergence dans le cas du matériau de 11.5 cm d'épaisseur. La figure 8 représente la comparaison pour l'impédance de surface, entre la prédiction basée sur l'équation (F.24) et les mesures pour un matériau à double porosité de 11.5 cm d'épaisseur ( $\phi_p = 0.11$ ). La comparaison est acceptable si on a à l'esprit que, à cause de la variation de la pression dans la direction transversale, c'est seulement une impédance de surface moyenne qui est calculée. Ce calcul est acceptable lorsque c'est un indicateur global tel que le coefficient d'absorption qui est à évaluer. En effet, le coefficient d'absorption calculé à partir de l'impédance de surface moyenne et celui calculé par l'équilibre des puissances sont les mêmes. Toutefois, l'interprétation de l'impédance de surface moyenne doit être faite avec précaution. Les auteurs croient que dans des cas de matériaux poreux non homogènes, seuls le coefficient d'absorption global et les puissances dissipées obtenues à partir de l'équilibre des puissances, sont significatifs. Ce sont ces indicateurs qui seront exploités dans la prochaine section qui traite des résultats numériques. La figure 9 présente une comparaison entre le modèle fluide équivalent et le modèle de Biot complet (Amédin et coll., 2000). Elle révèle effectivement que le modèle Biot est plus exact, les mesures expérimentales étant mieux estimées qu'avec le modèle fluide équivalent. D'autres résultats expérimentaux sont présentés dans une section ultérieure.

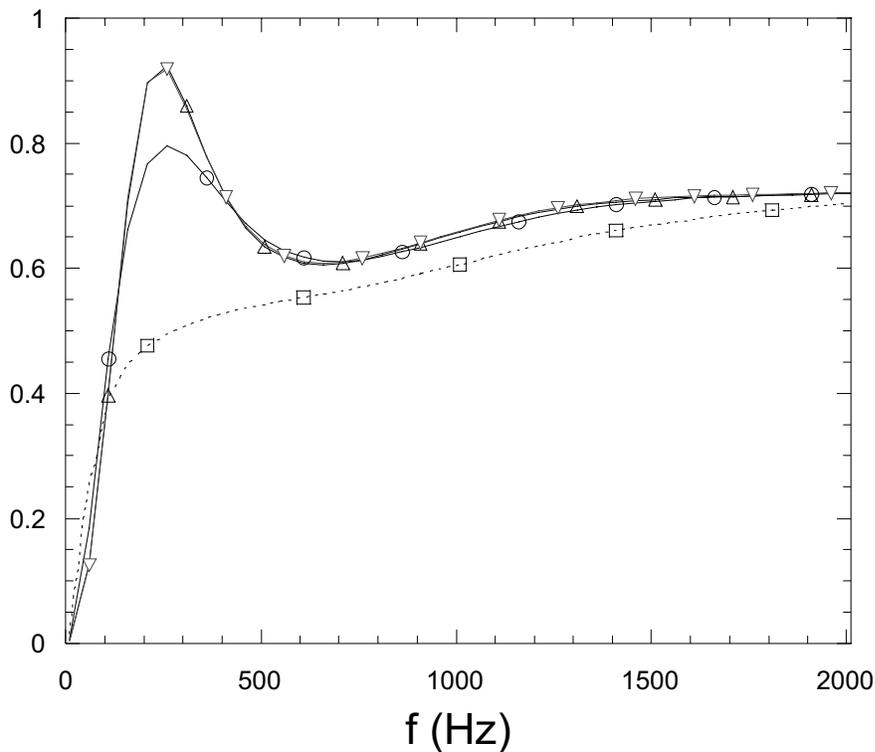


Figure 7 : Effets des modes évanescents sur le coefficient d'absorption :  
 --□-- : (m,n)=(0,0); —○— : (m,n)=(2,2); —△— : (m,n)=(4,4); —▽— : (m,n)=(6,6)

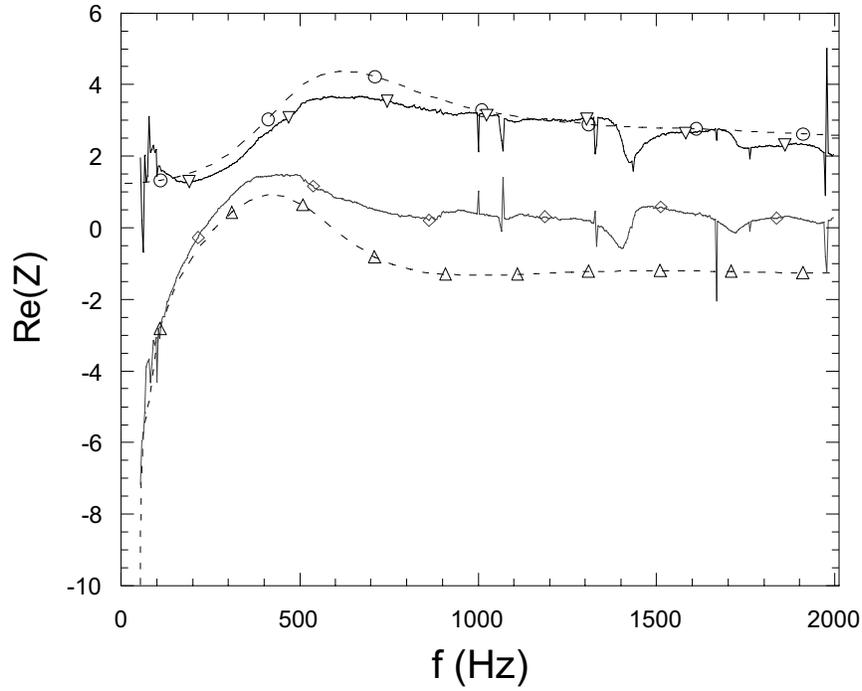


Figure 8 : Comparaison entre les mesures et les prédictions de l'impédance de surface moyenne.

$\nabla$  : mesure (partie réelle);  $\circ$  : calcul (partie réelle);  
 $\diamond$  : mesure (partie imaginaire);  $\triangle$  : calcul (partie imaginaire)

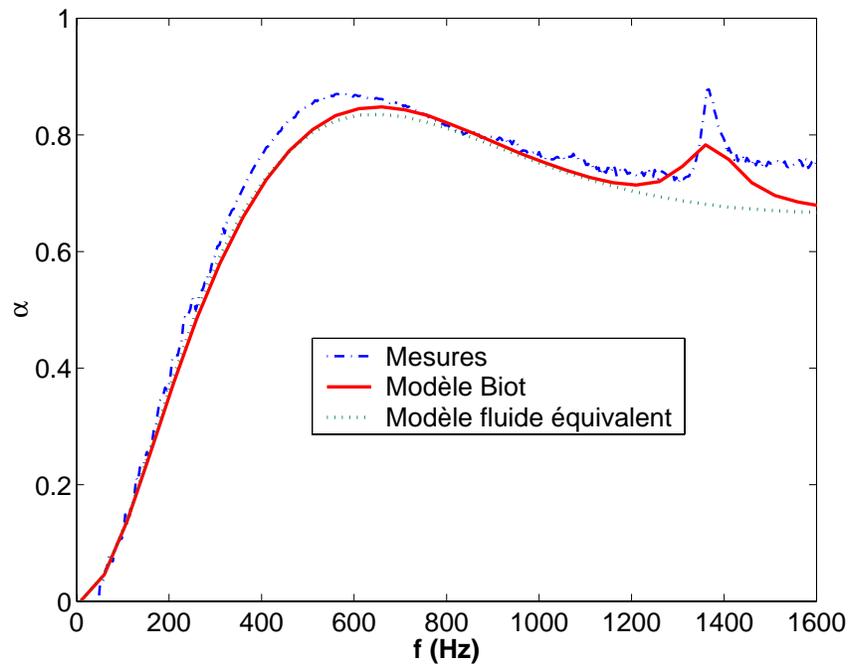


Figure 9 : Comparaison entre l'approche de Biot et l'approche fluide équivalent

## V ÉTUDE NUMÉRIQUE DE L'INFLUENCE DES HÉTÉROGÉNÉITÉS SUR L'ABSORPTION ACOUSTIQUE

La présence des pores se traduit au niveau macroscopique par une modification de la compressibilité apparente du milieu. Il s'ensuit une augmentation considérable de l'absorption acoustique dans le milieu macro-poreux.

Comme mentionné dans l'introduction pour un matériau à double porosité, la pression dans un domaine micro-poreux n'est pas uniforme, et la différence de pression entre les macro-pores et les micro-pores vérifie une équation de diffusion. La performance d'absorption de ces matériaux est reliée à la fréquence caractéristique qui correspond à la fréquence de diffusion. La fréquence de diffusion d'un matériau est donnée par la relation (Olny, 1999) :

$$\omega_d = \frac{8P_0}{\sigma_m \phi_m \Lambda_d^2 M_d} \quad (3)$$

où  $\sigma_m$  est la résistivité du matériau poreux,  $P_0 = 101300$  Pa,  $M_d$  est un facteur de forme qui dépend des formes des perforations et de la distribution des macro-pores. Ce coefficient a été introduit par Olny (1999) et peut s'écrire:

$$M_d = \frac{8D_{eq}}{(1-\phi_p)\Lambda_d^2} \quad (4)$$

où  $D_{eq}$  est une fonction qui dépend de la géométrie du réseau de macropores. Le terme  $\Lambda_d$  est une longueur caractéristique associée au processus de diffusion. Elle est reliée au taux de volume et de surface de macro-pores en contact avec le matériau poreux. Pour une perforation carrée de taille  $a$  dans une cellule poreuse de taille  $L$  et d'épaisseur  $d$ ,  $\Lambda_d$  est définie comme suit :

$$\Lambda_d = \frac{2(L^2 - a^2)d}{4ad + (L^2 - a^2)} = \frac{2(1-\phi_p)}{\frac{1-\phi_p}{d} + 4\frac{\phi_p}{a}} \quad (5)$$

Pour les matériaux à double porosité, il a été vu que le comportement acoustique de tout le matériau est gouverné par trois paramètres importants : la taille de la perforation, la macro-porosité et un facteur de forme. Olny a déterminé  $D_{eq}$  et  $M_d$  à partir des formules (3), (4) et (5), une fois  $\omega_d$  déterminée par recalage de l'impédance de surface. Utilisant le modèle proposé, les prochaines sections sont consacrées à l'étude de l'influence de ces paramètres sur le coefficient d'absorption et les puissances dissipées dans un matériau à double porosité. En particulier, les cas suivants sont étudiés : (i) l'effet de la macro-porosité lorsque la taille de perforation est constante; (ii) l'effet de la taille de perforation si la macro-porosité est constante; (iii) l'effet d'un facteur de forme pour une macro-porosité et une taille de perforation constante; (iv) l'effet de la résistivité du matériau micro-poreux; et (v) l'effet de la nature d'un second matériau dans les macro-pores. Finalement, une comparaison entre un matériau à double couche classique et son équivalent hétérogène est présentée. Dans la suite, toutes les simulations numériques sont faites avec une laine de roche de 11.5 cm d'épaisseur et dont les caractéristiques sont données dans le tableau 1.

## V.1 Influence de la macro-porosité

La figure 10 présente une section de la configuration étudiée. La taille des perforations (en gris clair sur la figure) est fixée à 2.83 cm, tandis que la macro-porosité est augmentée de 0.04 à 0.51. La figure 11 illustre les comparaisons pour le coefficient d'absorption lorsque la macro-porosité est augmentée. Pour des porosités supérieures à 0.04, on note une légère diminution de l'absorption dans les très basses fréquences, puis un gain important sur le reste du spectre. En hautes fréquences l'absorption est pratiquement comparable pour tous les matériaux (résultat non illustré sur la figure). Pour des matériaux à double porosité, un premier pic dépendant de la valeur de la macro-porosité apparaît dans la bande fréquentielle de 250-500 Hz. Plus la macro-porosité est élevée, plus haute est la fréquence de ce pic. La valeur maximale du pic augmente avec  $\phi_p$  allant de 0.04 à 0.18, mais on note qu'elle tend à être amortie pour des valeurs plus grandes, jusqu'à disparaître pour de très grandes macro-porosités ( $\phi_p \geq 0.51$ ). Toutefois, pour une grande macro-porosité, un second pic apparaît à des fréquences supérieures à 1000 Hz. Par conséquent, il est vu que la macro-porosité peut être choisie adéquatement pour obtenir un maximum d'absorption dans une bande fréquentielle donnée. En basses fréquences, une petite macro-porosité donne de meilleurs résultats, alors qu'une plus grande macro-porosité permet de mieux contrôler l'absorption en hautes fréquences. La figure 12 illustre la contribution des mécanismes de dissipations thermique et visqueuse, respectivement pour le coefficient d'absorption de chaque cas décrit dans la figure 11. Il apparaît clairement que les deux types de dissipations augmentent l'absorption dans la configuration non homogène. La plus grande contribution est toutefois due à la dissipation visqueuse.

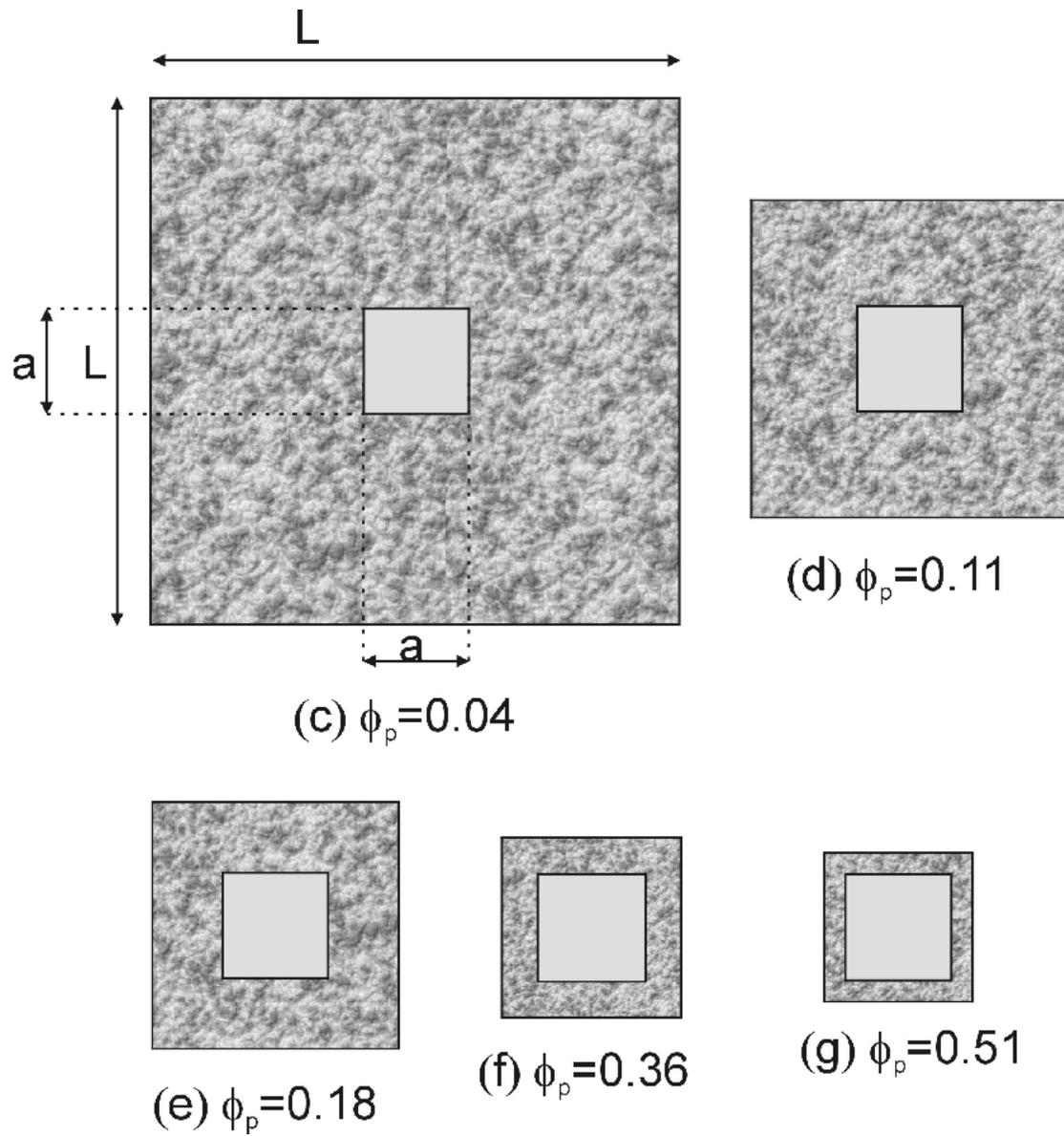


Figure 10 : Configurations étudiées et macro-porosités correspondantes

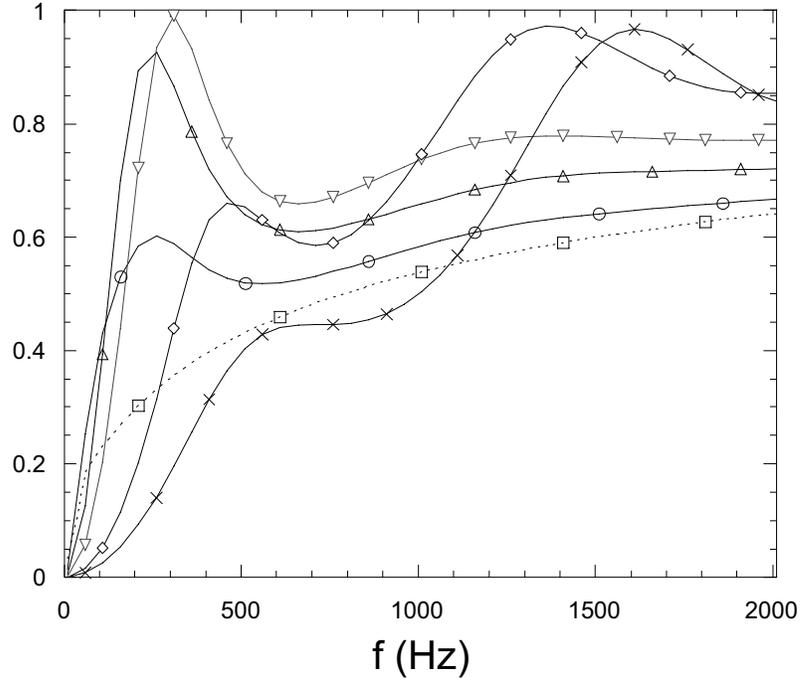


Figure 11 : Effets de la macro-porosité sur le coefficient d'absorption.

--□-- :  $\Phi_p=0$ ; —○— :  $\Phi_p=0.04$ ; —△— :  $\Phi_p=0.11$ ; —▽— :  $\Phi_p=0.18$ ; —◇— :  $\Phi_p=0.36$ ; —×— :  $\Phi_p=0.51$

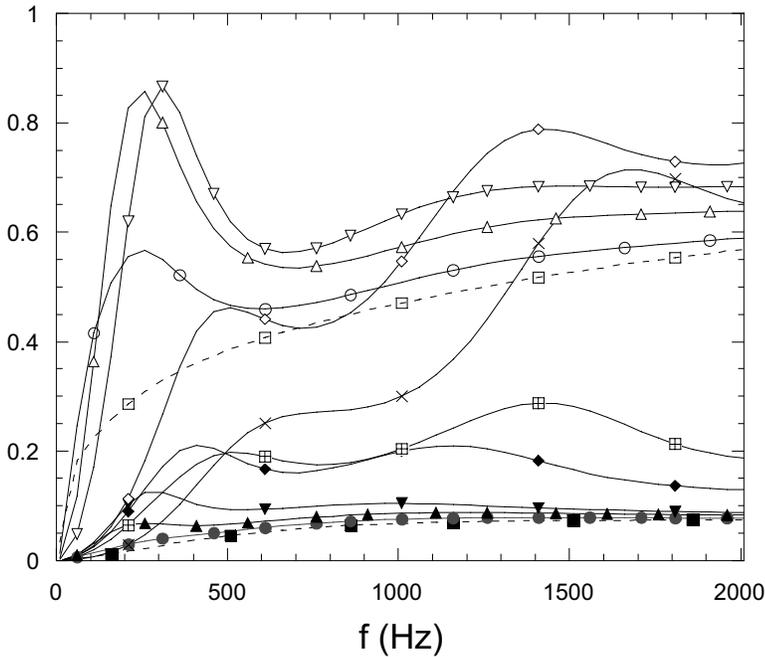


Figure 12 : Effets des mécanismes de dissipation thermique et visqueux sur le coefficient d'absorption pour diverses macro-porosités et  $a = 2.83$  cm.

--□-- :  $\Phi_p=0, \Pi_{diss}^v$ ; --■-- :  $\Phi_p=0, \Pi_{diss}^t$ ; —○— :  $\Phi_p=0.04, \Pi_{diss}^v$ ; —●— :  $\Phi_p=0.04, \Pi_{diss}^t$  ;  
—△— :  $\Phi_p=0.11, \Pi_{diss}^v$ ; —▲— :  $\Phi_p=0.11, \Pi_{diss}^t$ ; —▽— :  $\Phi_p=0.18, \Pi_{diss}^v$ ; —▼— :  $\Phi_p=0.18, \Pi_{diss}^t$  ;  
—◇— :  $\Phi_p=0.36, \Pi_{diss}^v$ ; —◆— :  $\Phi_p=0.36, \Pi_{diss}^t$ ; —×— :  $\Phi_p=0.51, \Pi_{diss}^v$ ; —⊠— :  $\Phi_p=0.51, \Pi_{diss}^t$  ;

## V.2 Influence de la taille des perforations

La figure 13 illustre une section de la configuration étudiée. La macro-porosité est gardée constante à 0.11, tandis que la taille du trou (en gris clair sur la figure) est variée de  $a/4$  à  $2a$ , avec  $a = 2.83\text{cm}$ .

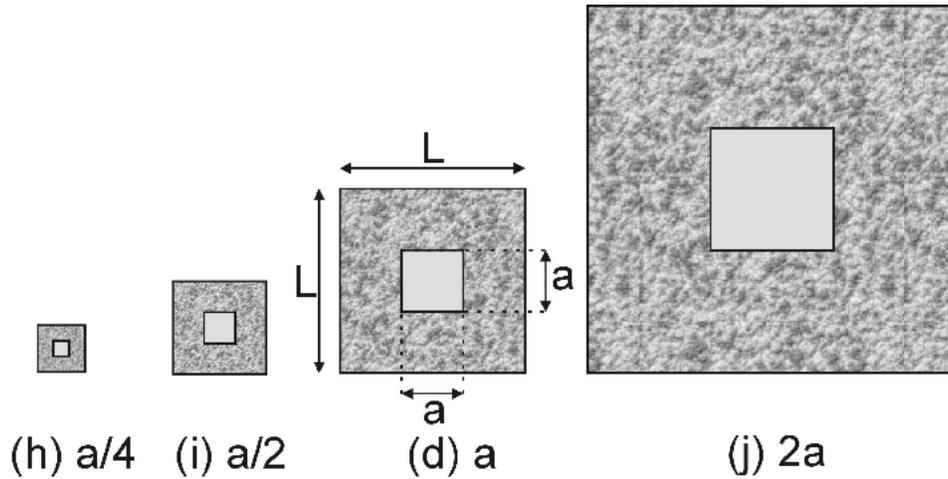


Figure 13 : Configurations étudiées

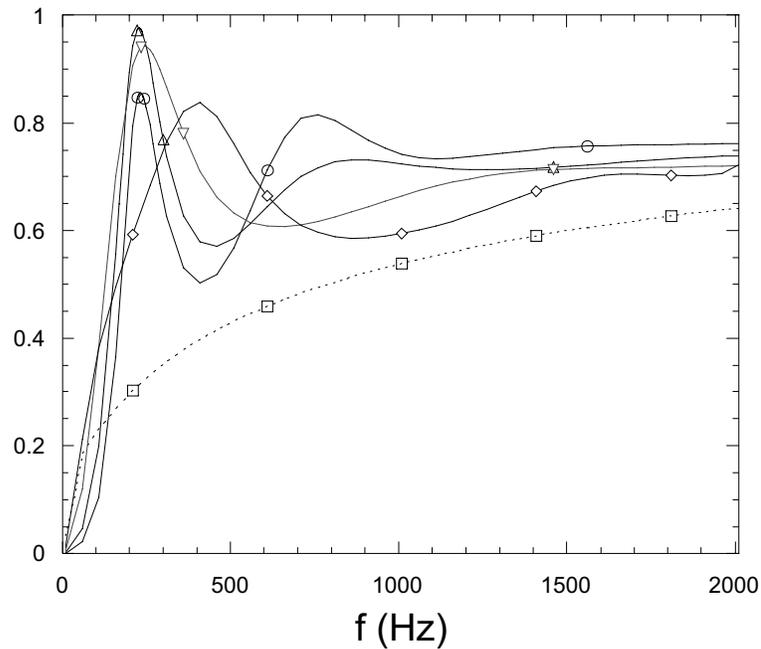


Figure 14 : Effets des tailles de perforation sur le coefficient d'absorption ( $\phi_p = 0.11$ )  
 --□--  $\phi_p=0$ ; —○— cas (h),  $a/4$ ; —△— cas (i),  $a/2$ ; —▽— cas (d),  $a$ ; —◇— cas (j),  $2a$

La figure 14 illustre les coefficients d'absorption correspondants. Il apparaît que pour toutes tailles de trou, le coefficient d'absorption a un pic distinct en basses fréquences. La

position fréquentielle et la largeur de bande du pic augmentent avec la taille du trou. Pour de petites tailles, les coefficients d'absorption ont un second pic distinct. La hauteur du premier pic augmente avec la taille du trou, alors que c'est l'inverse qui est observée pour le second pic. Ce comportement est confirmé par l'impédance de surface moyenne (qui n'est pas illustrée ici). La partie imaginaire de l'impédance est nulle au premier pic, elle atteint une valeur maximale lorsque le coefficient d'absorption est minimal, puis elle est encore nulle au second pic. Lorsque la taille du trou passe une certaine limite, le maximum de la partie imaginaire de l'impédance devient pratiquement constant et c'est seulement un distinct large pic d'absorption qui est observé. Finalement, il faut noter que le coefficient d'absorption reste toujours plus grand que celui d'un matériau homogène, pour toutes les tailles de trou. En conséquence, la taille de trou peut servir au contrôle de la largeur de bande du pic d'absorption.

### V.3 Influence de la distribution des macro-pores

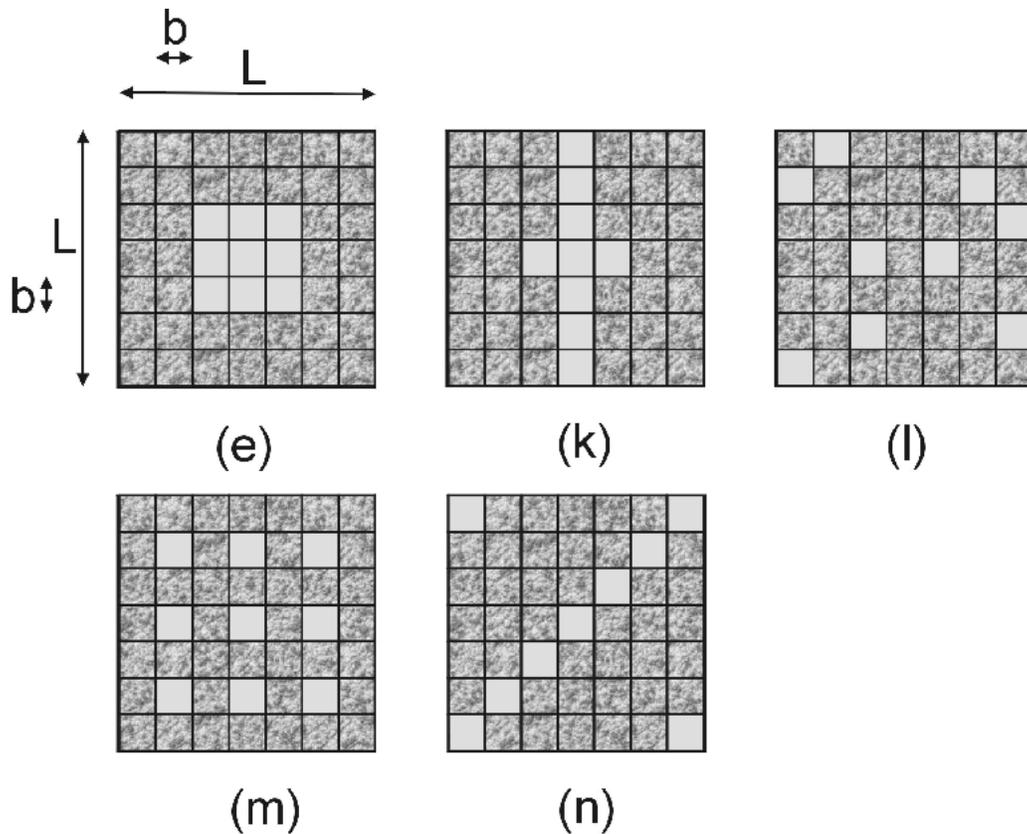


Figure 15 : Configurations étudiées

La figure 15 représente une section de la configuration utilisée pour étudier l'influence de la distribution des macro-pores (gris clair sur la figure). La macro-porosité est constante et égale à 0.18. La cellule considérée a une taille  $L=6.6$  cm et elle est subdivisée en 7 cellules élémentaires différentes qui ont un trou de 0.94 cm de taille. La figure 16 montre les effets sur le

coefficient d'absorption. Cette figure indique que les plus grands coefficients d'absorption sont obtenus en basses fréquences, pour les cas (e) et (k), qui ont un trou carré au centre et un trou en forme de fente. Toutefois, les cas (l), (m) et (n) donnent de meilleurs résultats en hautes fréquences. Dans les cas (e) et (k), le facteur de forme est partout le même, mais la longueur caractéristique  $\Lambda_d$  est plus grande que dans les cas (l), (m) et (n), et donc  $\omega_d$  est plus petite. Une plus petite fréquence de diffusion se traduit par une largeur de bande plus grande en basses fréquences pour le pic d'absorption, comme l'a montré Olny [11]. Cela peut être constaté sur la figure 16.

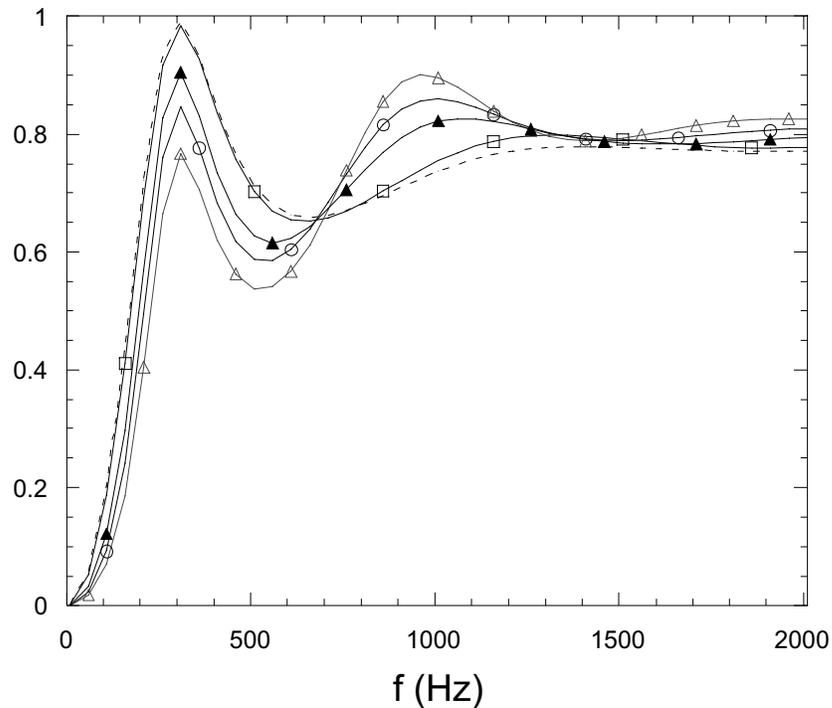


Figure 16 : Effets de la distribution des macro-pores sur le coefficient d'absorption ( $\phi_p = 0.18$ )  
 ----- cas (e); — $\triangle$ — cas (k); — $\square$ — case (l); — $\circ$ — cas (m); — $\blacktriangle$ — case (n)

#### V.4 Influence du profil des macro-pores

Cette section est consacrée à l'étude de l'influence du profil des cavités d'air selon l'épaisseur sur la performance d'absorption du système. La figure 17 représente une coupe selon l'épaisseur du matériau. Les parties blanches sur la figure correspondent aux trous. La macroporosité est constante et égale à 0.14 et la taille latérale de la cellule est gardée constante et égale à 8.5cm. Les cas (h) et (i) sont obtenus en distribuant les cavités d'air de façon aléatoire selon l'épaisseur de façon à avoir la macroporosité désirée. Le cas (i) est similaire au cas (b), à savoir que la macroporosité varie de 0.31 à 0.01, mais dans le premier cas la distribution est aléatoire.

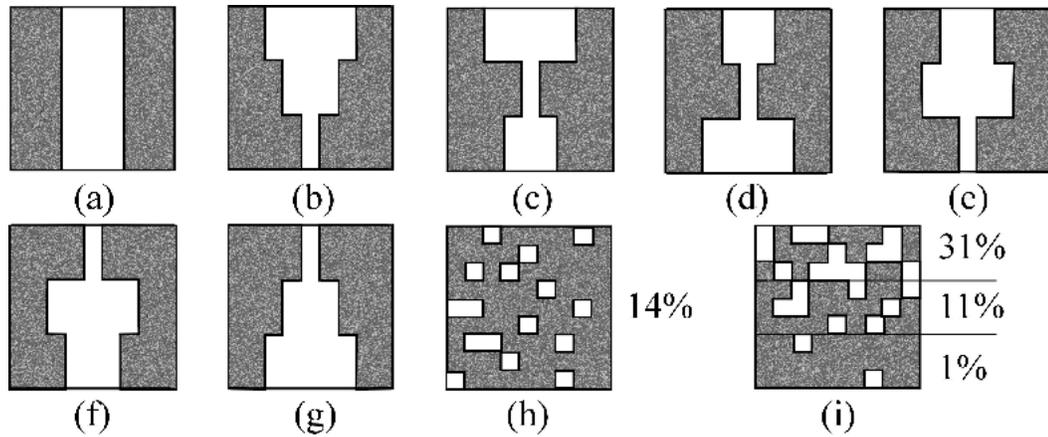


Figure 17 : Configurations étudiées des profils de perforations

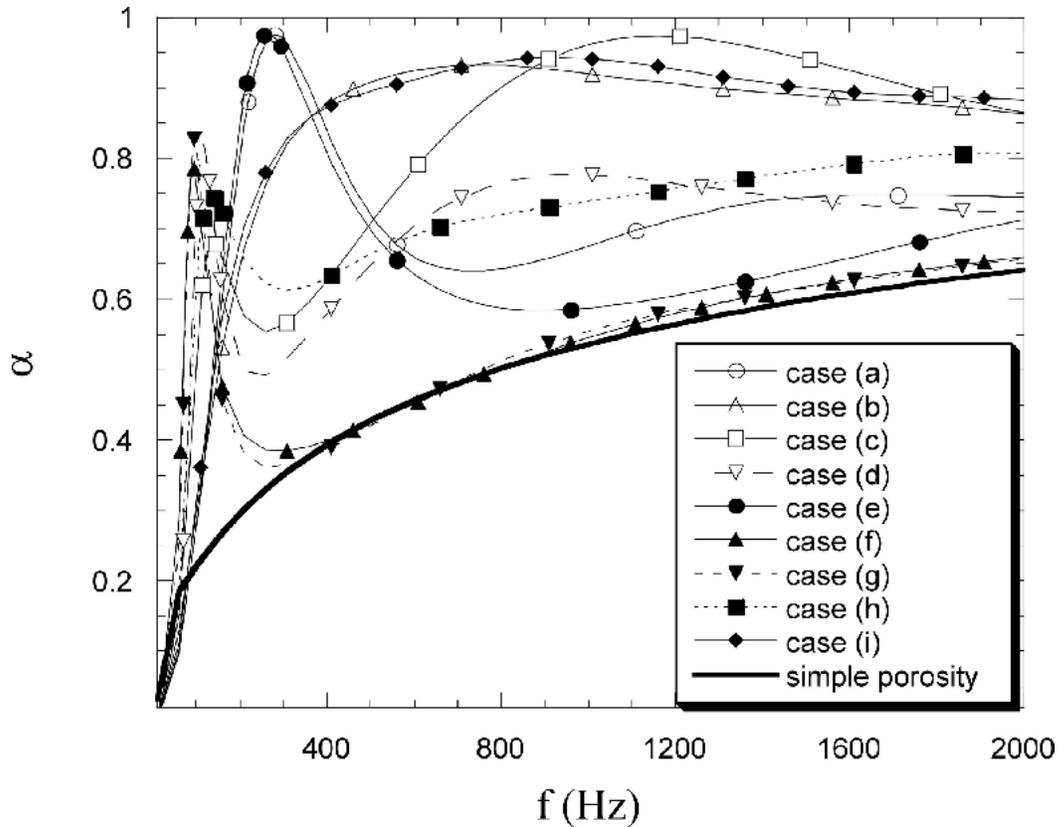


Figure 18 : Comparaison des coefficients d'absorption obtenus pour pour les différentes configurations de profils de trous ( $\phi_p = 0.14$ )

La figure 18 montre les résultats numériques. On constate que le profil du trou induit des changements importants dans la performance du matériau à double porosité. L'ajustement de ce profil permet d'améliorer le coefficient d'absorption de façon significative dans une bande de fréquences donnée. Une diminution progressive de la macroporosité au fur et à mesure que

l'onde s'enfonce dans le matériau permet d'augmenter le coefficient d'absorption dans une bande de fréquence très large. Une macroporosité faible en surface du matériau cause l'apparition d'un pic d'absorption très sélectif en basses fréquences mais le coefficient d'absorption diminue en plus hautes fréquences. Dans le cas des distributions aléatoires, on constate une efficacité large bande. Notons la ressemblance des courbes pour les cas (i) et (b).

### V.5 Influence de la résistivité des matériaux à double porosité

L'effet de la résistivité des matériaux micro-poreux est étudié dans cette section. La résistivité du matériau poreux des sections précédentes ( $\phi_p = 0.11$  et  $d = 11.5$  cm) est variée. Pour que les matériaux résultant de la variation de la résistivité soient réalistes, les longueurs caractéristiques visqueuses et thermiques sont aussi variées, dans le but de maintenir les facteurs de forme visqueux et thermiques constants. Les autres paramètres n'ont pas été modifiés. La figure 19 illustre l'influence de la résistivité sur le coefficient d'absorption. Cinq résistivités distinctes ont été comparées ( $\sigma_0 = 135 \text{ kNm}^{-4}\text{s}$ ;  $\sigma_1 = 80 \text{ kNm}^{-4}\text{s}$ ;  $\sigma_2 = 40 \text{ kNm}^{-4}\text{s}$ ;  $\sigma_3 = 20 \text{ kNm}^{-4}\text{s}$  et  $\sigma_4 = 400 \text{ kNm}^{-4}\text{s}$ ). Le principal effet est que la position fréquentielle du pic augmente lorsque la résistivité diminue. Il apparaît aussi que les pics deviennent plus larges. Comme prévu, de meilleurs résultats sont obtenus en hautes fréquences pour de petites valeurs de  $\sigma$ . Toutefois, une comparaison avec les cas de matériaux homogènes révèle que les meilleurs résultats sont obtenus avec un grand  $\sigma$ , comme l'illustre la figure 20. En conséquence, les macro-perforations sont plus efficaces pour les matériaux à grande résistivité.

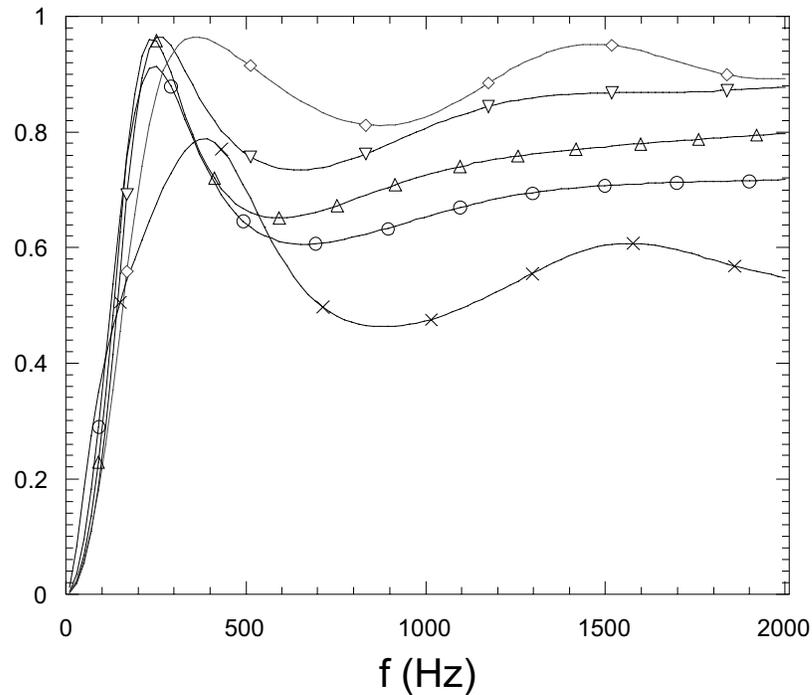


Figure 19 : Influence de la résistivité du matériau micro-poreux sur le coefficient d'absorption.

—○—  $\sigma_0$ ; —△—  $\sigma_1$ ; —▽—  $\sigma_2$ ; —◇—  $\sigma_3$ ; —×—  $\sigma_4$

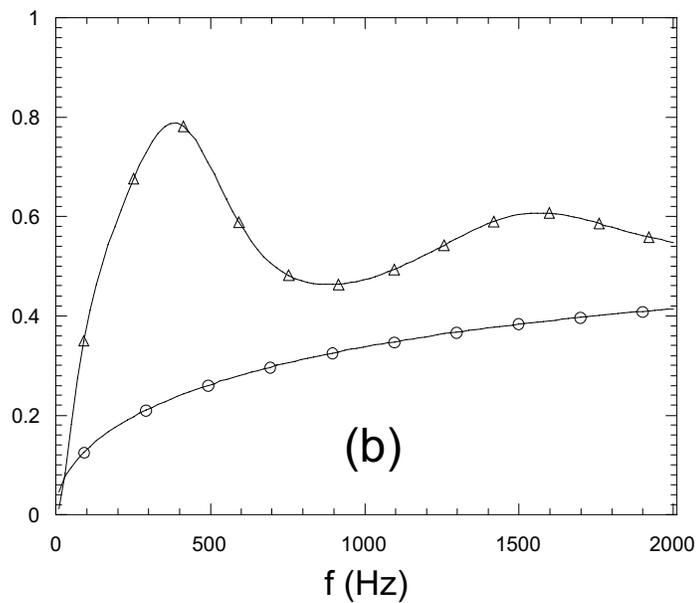
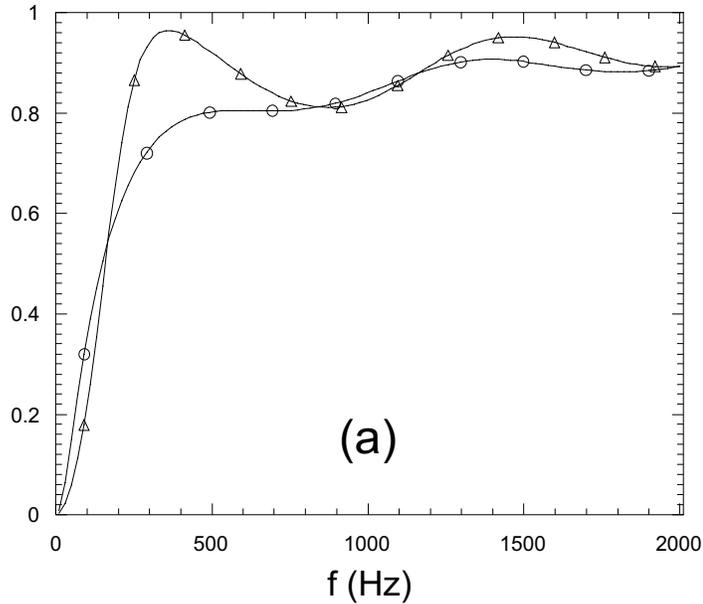


Figure 20 : Comparaison entre le matériau homogène et le matériau à double porosité ( $\phi_p = 0.11$ ) pour : (a)  $\sigma_3 = 20 \text{ kNm}^{-4}\text{s}$  (b)  $\sigma_4 = 400 \text{ kNm}^{-4}\text{s}$

## V.6 Macro-pores remplis de matériau poreux

Cette section est consacrée à l'étude de l'influence de la résistivité d'un second matériau dans les trous sur la performance d'absorption du système. Une laine de verre rigide (voir tableau 2 pour les propriétés mesurées) est maintenant utilisée à la place de l'air dans le trou central de la laine de roche illustrée sur la figure 4. La macro-porosité (définie ici comme le volume du trou par rapport au volume total) est gardée constante à 0.11. La figure 21 représente les résultats pour

plusieurs résistivités (pour chaque résistivité, les longueurs caractéristiques sont calculées de telle sorte que les facteurs de forme ne changent pas de valeurs). Il apparaît sur la figure que dans tous les cas, il y a une amélioration par rapport à la configuration du matériau homogène. Les meilleurs résultats sont obtenus dans les cas où il existe un fort contraste entre les résistivités des deux matériaux constitutifs. Plus grand est le contraste, plus la position fréquentielle du pic d'absorption est diminuée. Toutefois, une résistivité moyenne permet d'obtenir un pic plus large et une performance améliorée sur toute la plage fréquentielle.

<b>Matériau 2 : Laine de verre rigide (RGW)</b>	
Résistance à l'écoulement	$\sigma_m = 9000 \text{ Nm}^{-4}\text{s}$
Porosité	$\phi_m = 0,99$
Tortuosité	$\alpha_\infty = 1$
Longueur caractéristique visqueuse	$\Lambda = 192 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
Longueur caractéristique thermique	$\Lambda' = 384 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
Coeff. de Poisson	$\nu = 0$
Module d'Young	$E = 440000 \text{ Pa}$
Facteur de perte	$\eta = 0,1$
Masse volumique de la phase solide	$\rho_1 = 1630 \text{ kg/m}^3$

Tableau 2 . Propriétés acoustiques de la laine de verre rigide

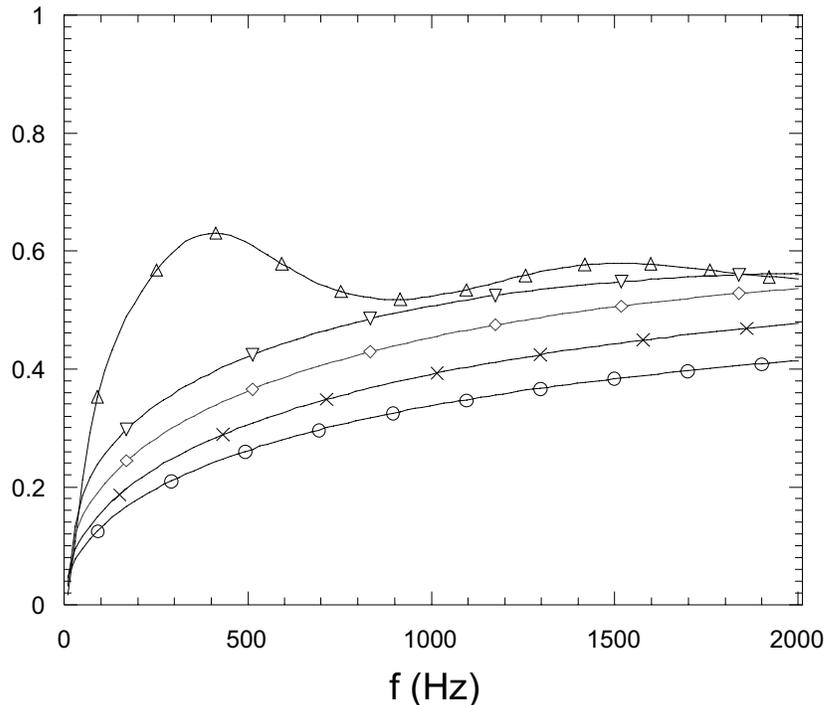


Figure 21 : Effets du contraste des résistivités sur le coefficient d'absorption lorsque les trous sont remplis avec un matériau poreux

—○— :  $\phi_p=0$ ; —△— :  $\sigma_p=2000$ ; —▽— :  $\sigma_p=15000$ ; —◇— :  $\sigma_p=30000$ ; —×— :  $\sigma_p=80000$

## V.7 Absorption d'un matériau poreux non homogène

Finalement, on considère un multicouche constitué de 5 cm de la laine de roche et de 1 cm de la laine de verre rigide à faible résistivité (RGW) utilisé dans les précédentes sections (voir les tableaux 1 et 2 pour les propriétés). La couche de laine de roche repose sur la terminaison rigide du guide d'onde. La figure 22 compare l'absorption sonore de ce multicouche à celle d'une configuration non homogène dans laquelle le RGW est distribué de façon aléatoire à l'intérieur du matériau, alors que le taux de volume occupé par les deux matériaux reste constant. Il apparaît qu'un meilleur coefficient d'absorption est obtenu dans le cas non homogène. Ce résultat confirme que les différents patches interagissent entre eux et qu'une meilleure performance d'absorption peut être obtenue par l'utilisation d'une configuration non homogène.

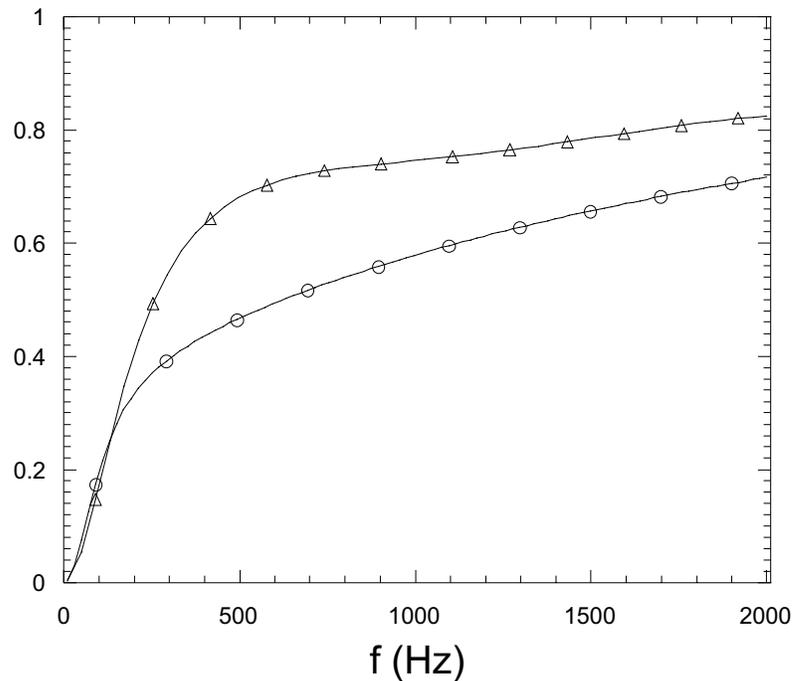


Figure 22 : Comparaison entre un matériau à deux couches et un matériau non homogène équivalent

—○— : Bi-couches; —△— : matériau non homogène.

## VI RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX SUR L'ABSORPTION ACOUSTIQUE

Pour illustrer une partie des conclusions obtenues dans les parties précédentes, cette section présente une série de résultats expérimentaux obtenus sur plusieurs types de mousses. Pour des raisons de confidentialité, toutes les caractéristiques ainsi que les noms des mousses ne seront pas divulgués dans ce rapport. On indiquera seulement la résistance au passage de l'air.

Les mesures d'absorption ont été faites dans un tube de Kundt B&Kjaer circulaire de diamètre 10 cm. La méthode du doublet microphonique a été utilisée. La figure 23 montre le dispositif expérimental.

Pour l'ensemble des configurations, on a utilisé un trou unique de diamètre de perforation égal à  $1\frac{1}{8}$  (2.86 cm) (cf figure 24). Pour certaines configurations, on a également pratiqué 4 trous de diamètre ( $\frac{7}{8}$ '' (2.22 cm) ou  $\frac{3}{4}$ '' (1.90 cm)) selon le schéma de la figure 24. Notons que pour une taille donnée de cellule, la modification de la taille du trou modifie également la macroporosité.

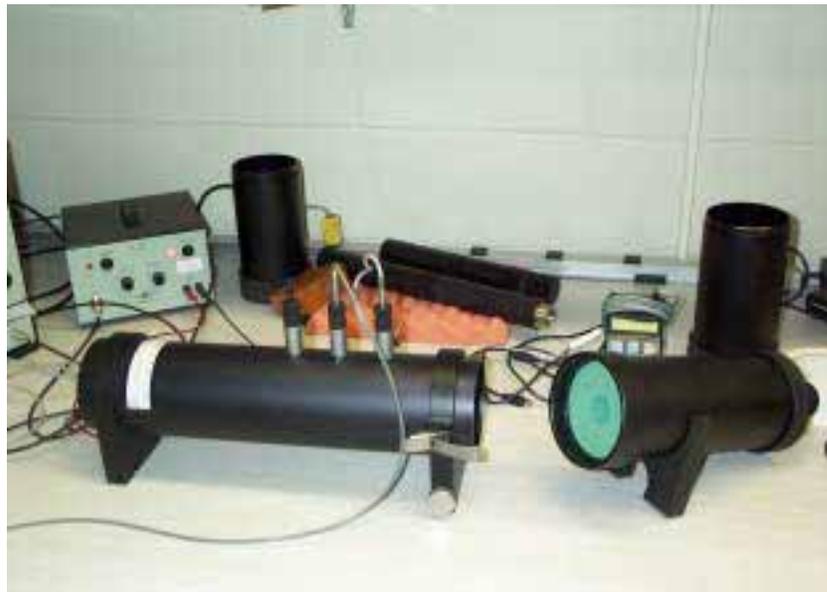


Figure 23 : Dispositif expérimental utilisé pour les mesures

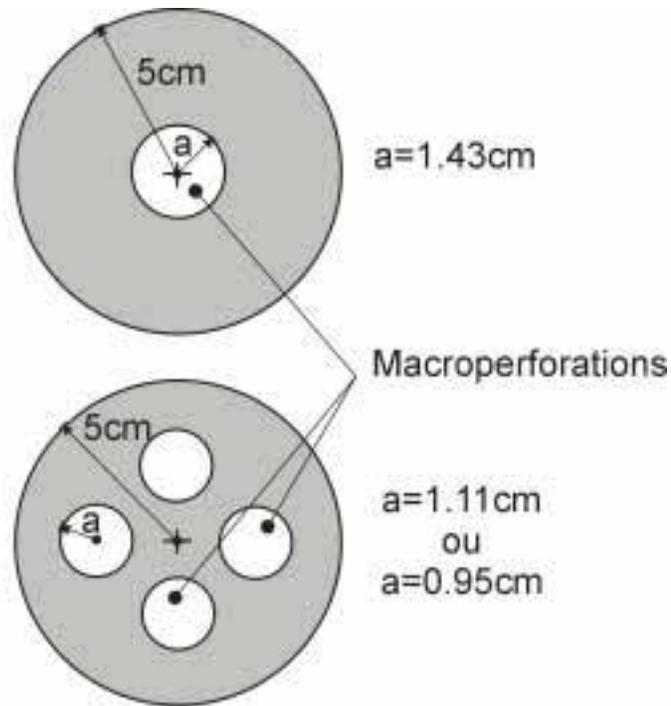


Figure 24 : Description des macroperforations utilisées

### VI.1 Matériau A ( $\sigma = 5877 \text{ Ns/m}^4$ )

La figure 25 montre une photo des deux échantillons testés, sans perforation (simple porosité) et avec une macroperforation de diamètre 2.86 cm (double porosité). Cette macroperforation correspond à une macroporosité  $\phi_p = 0.08$ . Le matériau est une mousse, de résistance au passage de l'air  $\sigma = 5877 \text{ Ns/m}^4$  et d'épaisseur  $d = 31.57 \text{ mm}$ . La figure 26 compare le coefficient d'absorption expérimental pour chacun des échantillons.

Du fait du faible contraste de résistivité entre l'air contenu dans les pores et le matériau, le coefficient d'absorption de la mousse à double porosité est inférieur à celui du matériau plein.



Figure 25 : Photo des échantillons testés

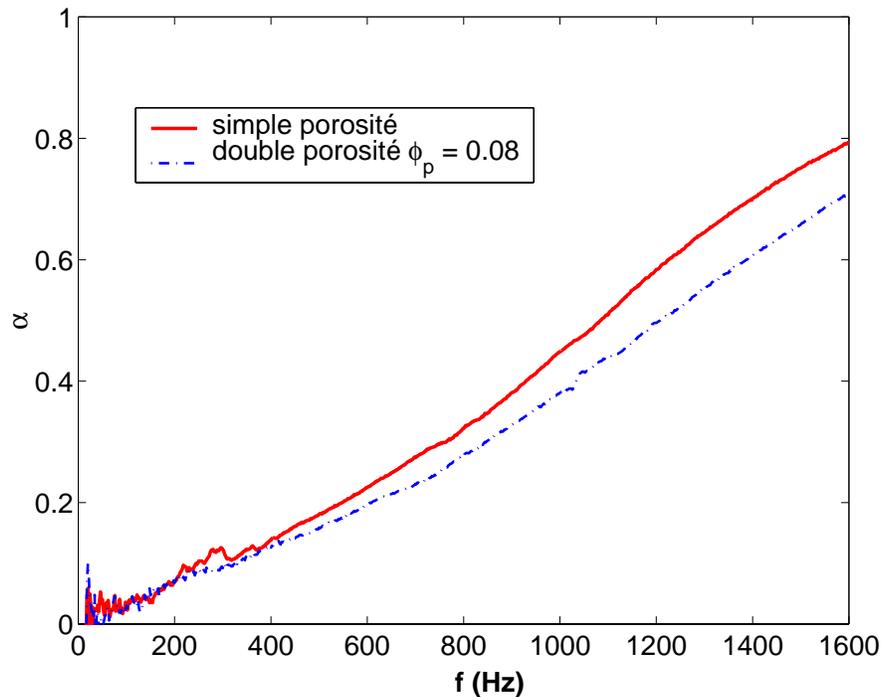


Figure 26 : Coefficients d'absorption expérimentaux du matériau A à simple et double porosité

## VI.2 Matériau B ( $\sigma = 50485 \text{ Ns/m}^4$ )

La figure 27 montre une photo des trois échantillons testés, sans perforation (simple porosité), avec une macroperforation de diamètre 2.86 cm et avec 4 macroperforations de diamètres identiques 1.9 cm. Le matériau est une mousse, de résistance au passage de l'air  $\sigma = 50485 \text{ Ns/m}^4$  et d'épaisseur 37.44 mm. Les configurations étudiées sont présentées sur la figure 28. Elles correspondent respectivement à :

- un échantillon de 37.44 mm à simple porosité
- un échantillon de 37.44 mm à double porosité avec une macroperforation unique ( $\phi_p = 0.08$ )
- deux échantillons de 37.44 mm à double porosité avec une macroperforation unique ( $\phi_p = 0.08$ ) assemblés
- deux échantillons de 37.44 mm, l'un à double porosité avec une macroperforation unique ( $\phi_p = 0.08$ ), l'autre à simple porosité
- deux échantillons de 37.44 mm, l'un à simple porosité, l'autre à double porosité avec une macroperforation unique ( $\phi_p = 0.08$ )
- deux échantillons de 37.44 mm à double porosité avec 4 macroperforations ( $\phi_p = 0.15$ ), les trous se correspondant

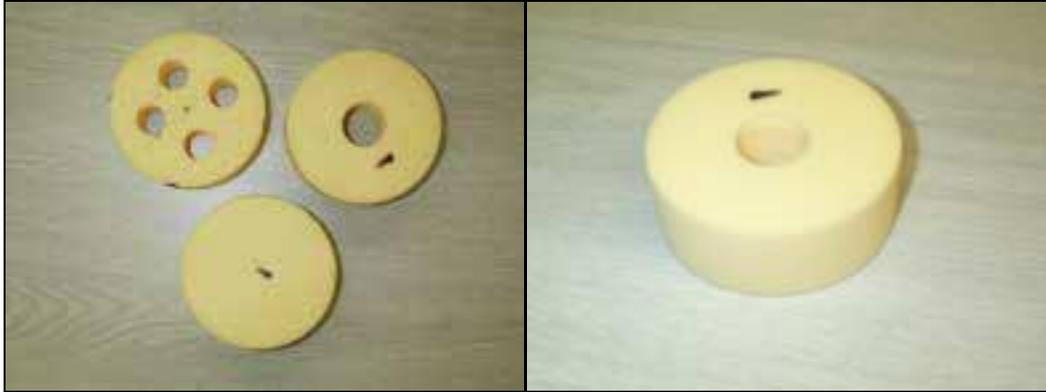


Figure 27 : Photo des échantillons testés

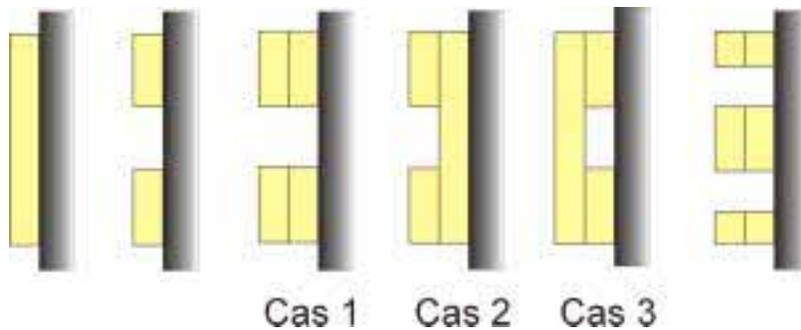


Figure 28 : Configurations étudiées (matériau en jaune, trou en blanc, mur rigide en noir)

Les figures 29 et 30 comparent le coefficient d'absorption expérimental pour les deux épaisseurs et pour chacune des configurations. On constate sur ces figures que la macroporosité permet d'obtenir un gain important en absorption et ce d'autant plus que l'épaisseur est grande. En effet, la fréquence de diffusion diminue avec l'épaisseur du matériau. L'augmentation de la macroporosité déplace le pic d'absorption vers les hautes fréquences.

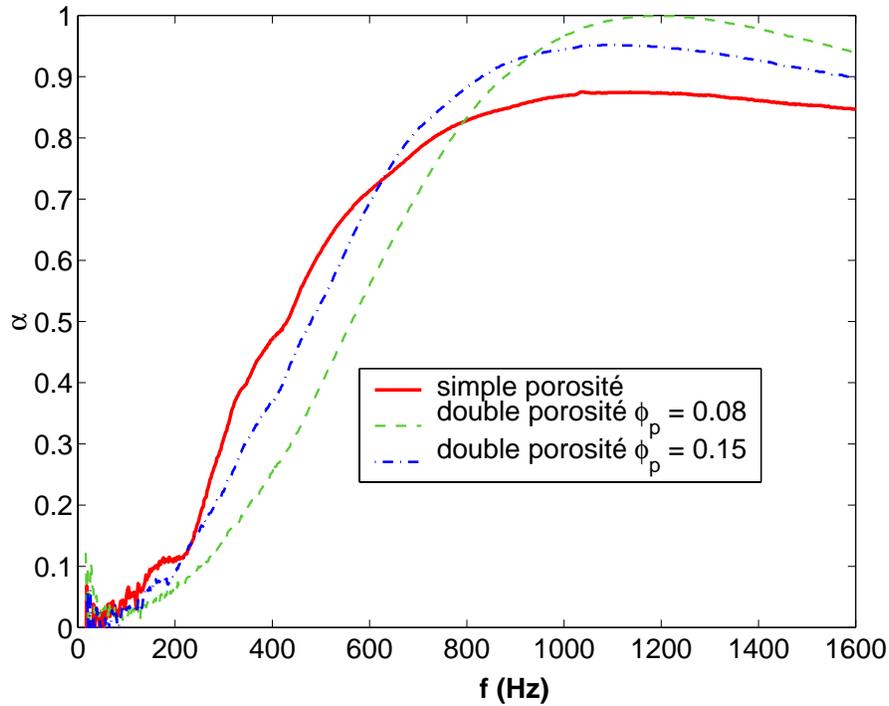


Figure 29 : Coefficients d'absorption expérimentaux des échantillons d'épaisseur 37.44 mm

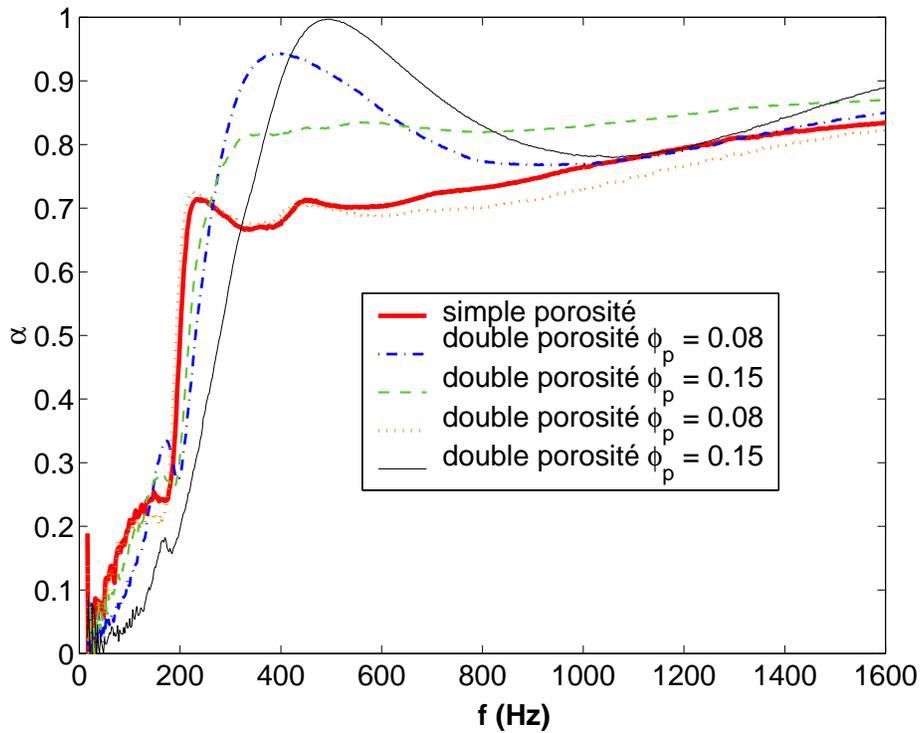


Figure 30 : Coefficients d'absorption expérimentaux des échantillons d'épaisseur 74.88 mm pour chacune des configurations étudiées

### VI.3 Matériau C ( $\sigma = 62320 \text{ Ns/m}^4$ )

La figure 31 montre une photo des deux échantillons testés, sans perforation (simple porosité) et avec une macroperforation de diamètre 2.86 cm (double porosité). Cette macroperforation correspond à une macroporosité  $\phi_p = 0.08$ . Le matériau est une mousse, comportant un film microporeux, de résistance au passage de l'air  $\sigma = 62320 \text{ Ns/m}^4$  et d'épaisseur 19.5mm. La figure 32 compare le coefficient d'absorption expérimental pour chacun des échantillons. On peut noter le gain très important obtenu avec l'échantillon à double porosité.



Figure 31 : Photo des échantillons testés

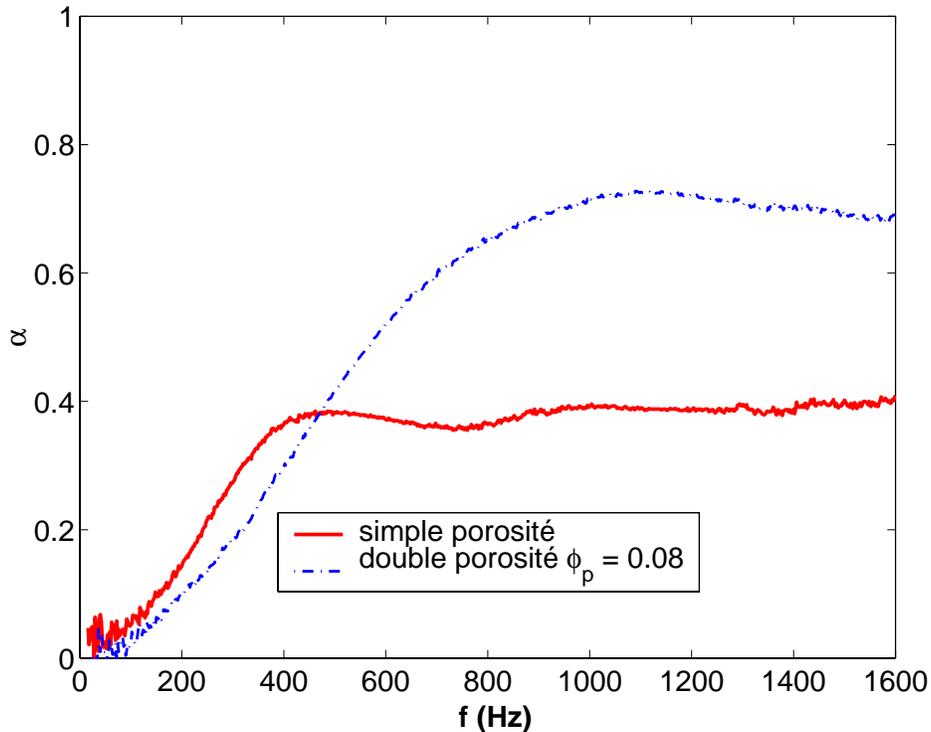


Figure 32 : Coefficients d'absorption expérimentaux des échantillons d'épaisseur 19.5 mm

#### VI.4 Matériau D ( $\sigma = 72717 \text{ Ns/m}^4$ )

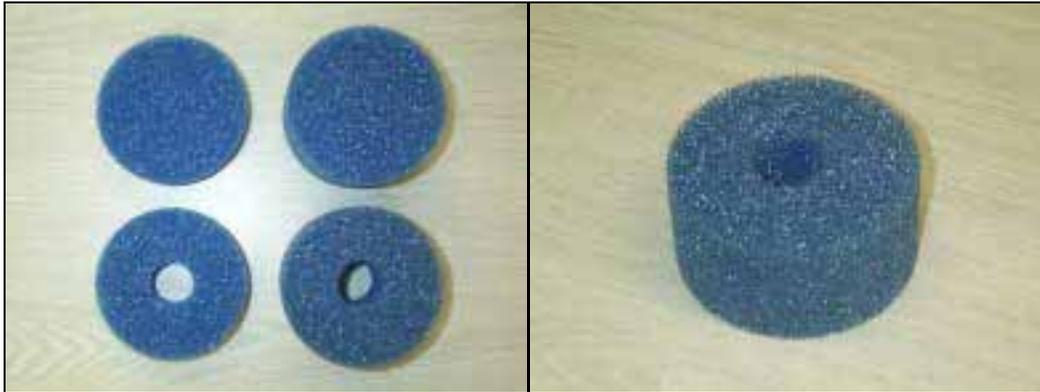


Figure 33 : Photo des échantillons testés

La figure 33 montre une photo des deux échantillons testés, sans perforation (simple porosité) et avec une macroperforation de diamètre 2.86 cm (double porosité). Cette macroperforation correspond à une macroporosité  $\phi_p = 0.08$ . Le matériau est une mousse, de résistance au passage de l'air  $\sigma = 72717 \text{ Ns/m}^4$  et d'épaisseur  $d = 50.53 \text{ mm}$ . La figure 34 compare le coefficient d'absorption expérimental pour chacun des échantillons. Une fois de plus, c'est l'échantillon à double porosité qui offre la meilleure performance d'absorption, et cela sur une large bande fréquentielle.

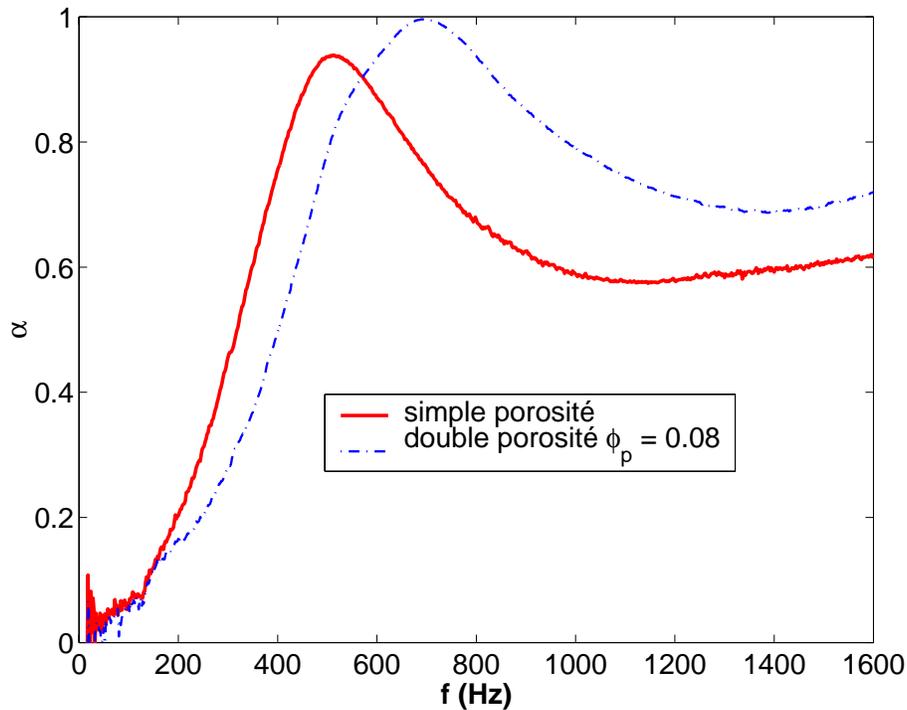


Figure 34 : Coefficients d'absorption expérimentaux des échantillons d'épaisseur 50.53 mm

Le même matériau a été utilisé pour tester expérimentalement l'influence du profil des macro-pores (qui a été évaluée numériquement dans la section V.4). Pour ce faire, chaque configuration testée est constituée de deux couches de 50.53 mm. Chacune des deux couches peut être de simple porosité (macroporosité nulle), ou posséder une macroporosité  $\phi_p = 0.08$  (correspondant à une macroperforation de diamètre 2.86 cm), ou encore, elle peut avoir une macroporosité  $\phi_p = 0.04$  dite "aléatoire", au sens que deux macroperforations de diamètre 1.27 cm sont faites suivant des angles différents. La figure 35 montre des photos de l'échantillon à macroporosité "aléatoire".



Figure 35: Échantillon à macroporosité "aléatoire"

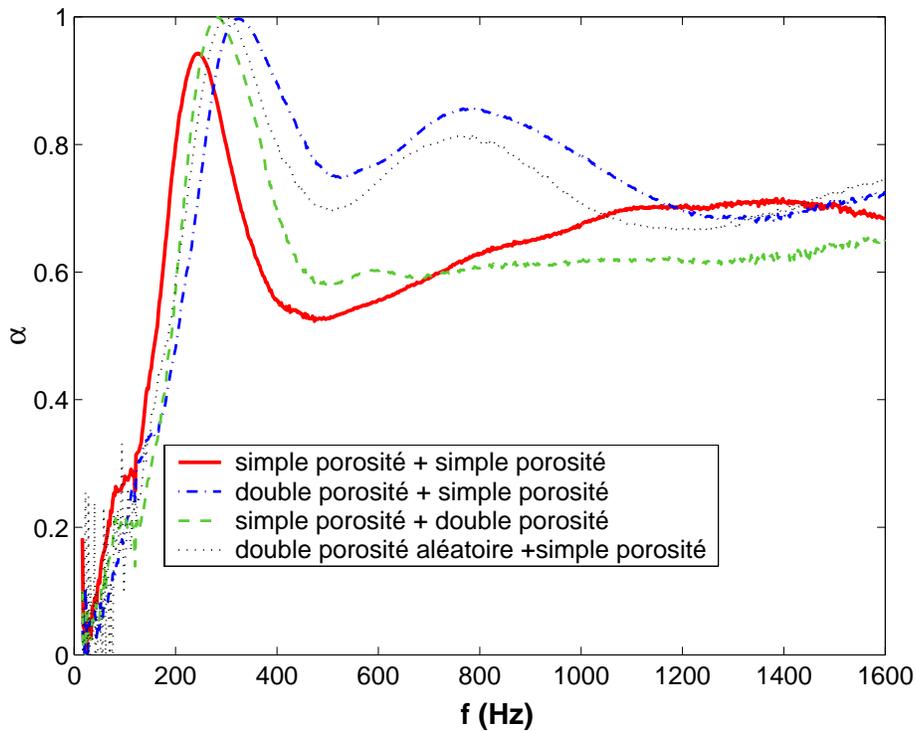


Figure 36 : Influence du profil des macroperforations sur les coefficients d'absorption expérimentaux

La figure 36 représente une comparaison entre une configuration homogène à deux couches de simple porosité, une configuration à macroporosité décroissante suivant l'épaisseur (composée d'une couche à  $\phi_p = 0.08$  et d'une couche de simple porosité), une configuration à macroporosité croissante suivant l'épaisseur (composée d'une couche de simple porosité et d'une couche à  $\phi_p = 0.08$ ), et d'une autre configuration à macroporosité décroissante (composée de la couche à double porosité aléatoire et d'une couche homogène). Il apparaît que la diminution de la macroporosité en fonction de l'épaisseur se traduit par une augmentation du coefficient d'absorption sur une large bande fréquentielle. Ce gain s'accompagne néanmoins d'une augmentation de la fréquence des pics d'absorption. On note aussi qu'une augmentation de la macro-porosité suivant l'épaisseur entraîne une diminution importante de l'absorption en basses fréquences. Finalement, la configuration comprenant la macroporosité aléatoire donne de bons résultats sur une large bande fréquentielle, tout en rabaisant la fréquence des pics d'absorption vers le cas de la configuration homogène. Ces résultats confirment des remarques qui ont été faites numériquement, à savoir que l'influence du profil des micro-pores peut servir à modifier la performance d'absorption des matériaux macroperforés.

## CONCLUSION

L'objectif principal de ce projet est de comprendre les mécanismes régissant l'absorption acoustique et la transparence acoustique des matériaux poreux en basses fréquences afin de pouvoir identifier et tester des solutions à fort potentiel d'applicabilité. L'idée est de tester l'effet d'hétérogénéités dans le matériau poreux sur le comportement en absorption du matériau. Ces hétérogénéités peuvent être des cavités d'air, des matériaux poreux de nature différente ou des inclusions solides légères. Il s'agit donc de comprendre les mécanismes régissant l'absorption, en basse fréquence, des matériaux poreux hétérogènes afin d'identifier et de tester des solutions à fort potentiel d'applicabilité.

Pour répondre à cet objectif, un modèle numérique a été développé pour simuler le comportement vibratoire et acoustique des matériaux poreux hétérogènes tridimensionnels placés dans un guide d'onde dans le domaine des basses fréquences. Le modèle est basé sur une approche par éléments finis pour les matériaux poroélastiques hétérogènes et sur une approche modale pour la description du champ acoustique dans le guide d'onde. Le couplage entre le milieu poreux hétérogène et le guide d'onde se fait via une matrice d'admittance. Le milieu poreux hétérogène est supposé constitué d'un assemblage d'éléments (ou patches) poreux, fluides ou solides. La propagation des ondes au sein de chaque élément poreux a été modélisée par les équations de la poroélasticité de Biot-Allard, alors que les patches fluides et les patches solides ont été respectivement décrits par l'équation de Helmholtz et l'équation de l'élastodynamique. L'utilisation de formulations faibles poroélastiques appropriées permet de s'affranchir du calcul des matrices de couplage surfaciques entre patches de nature différente. Ce modèle a permis d'étudier l'effet des hétérogénéités sur le comportement en absorption des matériaux poreux.

Une validation expérimentale a été présentée sur différentes configurations hétérogènes pour démontrer l'exactitude du modèle développé dans le cas de matériaux fibreux hautement résistifs. Une étude paramétrique numérique a permis de montrer que les patches voisins interagissent entre eux, et que des matériaux non homogènes donnent des performances supérieures à celles de simples couches de matériaux. En particulier, il a été prouvé que les matériaux poreux macro-perforés hautement résistifs donnent une augmentation notable des performances d'absorption en basses fréquences, sans qu'il y ait de diminution de ces performances en hautes fréquences. Cette solution semble très efficace et facile à mettre en œuvre. Le pourcentage d'hétérogénéités, leur taille et leur forme sont des paramètres essentiels de conception. Une étude expérimentale a également été menée sur différentes mousses industrielles. La macroperforation permet encore d'améliorer le comportement en absorption en moyennes et hautes fréquences sans dégradation majeure en très basses fréquences.

Sur le plan technologique, le code numérique développé permet d'envisager une aide importante à la conception de nouveaux matériaux basés sur le principe d'addition d'hétérogénéités et possédant des propriétés d'absorption élevées en basses fréquences. Sur le plan scientifique, une formulation originale alliant éléments finis et approche modale a permis de simuler les conditions d'expérimentation (tube de Kundt) avec une grande fidélité.

Afin de mieux cerner les performances des nouveaux matériaux mis au point, il est suggéré de les tester dans des configurations industrielles telles que les capotages de moteur, traitements des salles et des usines, silencieux industriels, etc. De tels tests conditionneront l'élaboration industrielle des matériaux développés.

En raison de la complexité des phénomènes et par manque de temps, seule une ébauche théorique de la transmission acoustique à travers des matériaux présentant des hétérogénéités a été abordée (Atalla et Sgard, 2000). L'aspect théorique de la transparence acoustique reste donc à approfondir, avant de pouvoir effectuer des validations expérimentales et des études paramétriques.

Mentionnons finalement que sur le plan scientifique, différentes formulations originales ont vu le jour grâce à ce projet. En particulier, deux papiers scientifiques ont été publiés dans des revues de prestige (Atalla et al. 2000a; Atalla et al. 2000b), plusieurs conférences ont été présentées sur le sujet et deux autres papiers sont en préparation.

## RÉFÉRENCES

- Allard. J. F. *Propagation of sound in porous media, Modelling sound absorbing materials*. Elsevier Application Science, New York, Londres, 1993. 284 p.
- Amédin C. K., Atalla N., Sgard F. C. Acoustic absorption of non-homogeneous poroelastic materials. *Canadian Acoustical Association conference*, 2000.
- Atalla N., Panneton R. The effects of multilayer sound-absorbing treatments on the noise field inside a plate backed cavity. *Noise Control Eng.*, 44(5) : 235-243, 1996.
- Atalla N., Panneton R., Allard J. F. Sound absorption by non homogenous thin porous layers. *Acta Acoustica*, 83 (5) : 891-896, 1997.
- Atalla N., Panneton R., Debergue P. A mixed displacement-pressure formulation for poroelastic materials. *J. Acoust. Soc. Am.*, 104 (3) : 1444-1452, 1998.
- Atalla N., Sgard F. C., Olny X., Panneton R. Acoustic absorption of macro-perforated porous materials. *Accepté dans J. Sound and Vibration*, 2000a.
- Atalla N., Hamdi M.A., Panneton R. Enhanced weak integral formulation for mixed (u,p) poroelastic equations. , *Accepté dans J. Acoust. Soc.Amer.*, 2000b.
- Atalla N., Sgard F. Transmission loss of non-homogeneous porous media. ASA meeting, Long Beach, Ca., December 2000.
- Auriault J. L., Boutin C. Deformable porous media with double porosity iii : Acoustics. *Transport in Porous media*, 14 : 143-162, 1994.
- Bardot A., Brouard B., Allard J. F. Frame decoupling at low frequencies in thin porous saturated by air. *J. Appl. Phys.*, 79, 1996.
- Bell et Bell. *Industrial noise control*, (Marcel Dekker Inc. NY, USA), 1994.
- Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves... *J. Acoust. Soc. Am.*, 28 : 1468-178, 1956.
- Boutin C., Royer P., Auriault J. L., Acoustic absorption of porous surfacing with dual porosity. *Int. J. Solids Structures*, 35 (34-35) :4709-4737, 1998.
- Boutin C., Olny X.. Mécanique des matériaux hétérogènes. In *Mécanique des matériaux hétérogènes*, pages 29-34, Grenoble (France), 1999.
- Brouard B., Lafarge D., Allard. J. F. General method of modeling sound propagation in layered media. *J. Sound Vib.*, 183 : 129-142, 1995.

- Debergue P. *Développement d'une formulation mixte en déplacement-pressure pour les matériaux poroélastiques*. Mémoire de maîtrise, Université de Sherbrooke, 1997.
- Debergue P., Panneton R., Atalla N. Boundary conditions for the weak formulation of the mixed (u,p) poroelasticity problem. *J. Acoust. Soc. Am.*, 106(5), 2383-2390, 1999.
- Coyette J. P., Wynendaele. A finite element model for predicting... *Proceedings of Inter-Noise 95* : 1279-1282, 1995.
- Gorog S., Panneton R., Atalla N. Mixed displacement pressure formulation for acoustic anisotropic porous media. *J. Appl. Phys.* 82 : 4192-4196 (1997)
- Ingard U. *Notes on sound absorption technology*. Bk and Disk edition, 1994.
- Kang Y. J., Bolton J. S. Finite element modeling of isotropic elastic porous materials coupled with acoustical finite elements. *J. Acoust. Soc. Am.*, 98 : 635-643, 1996.
- Millot P. *Rayonnement acoustique de plaques couplées dans une cavité*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1987.
- Olny X. *Absorption acoustique des milieux poreux à simple et double porosité – Modélisation et validation expérimentale*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1999.
- Panneton R. *Modélisation numérique tridimensionnelle par éléments finis des milieux poroélastiques*. Thèse de doctorat, Génie mécanique, Université de Sherbrooke 1996.
- Panneton R., Atalla N. Numerical prediction of sound transmission... *J. Acoust. Soc. Am.*, 99 : 2755-2765, 1996.
- Panneton R., Atalla N. An efficient finite element scheme for solving the three dimensional poroelasticity problem in acoustics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 101 : 3287-3298, 1997a.
- Panneton R., Atalla N. Low frequency approximations for acoustics porous. *Trans. CSME*, 21 : 401-413, 1997b.
- Panneton R., Atalla N. Computer simulations of multilayer panels... *Proceedings of Noise Con 1998*.
- Rigobert S., Sgard F., Atalla N. Numerical modeling of multilayered including porous materials: hierarchical elements and non coincident meshes. *Euronoise, Patra*, 2001.

## ANNEXE A : ÉQUATIONS DE LA POROÉLASTICITÉ DE BIOT-ALLARD-JOHNSON

Les équations de la formulation mixte ( $\underline{u}$ ,  $p$ ) de la poro-élasticité de Biot [3] sont données par :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^s(\underline{u}) + \omega^2 \tilde{\rho} \underline{u} + \tilde{\gamma} \nabla p &= 0 \\ \Delta p + \omega^2 \frac{\tilde{\rho}_{22}}{\tilde{R}} p - \omega^2 \frac{\tilde{\rho}_{22}}{\phi^2} \tilde{\gamma} \operatorname{div} \underline{u} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Dans ces équations,  $\underline{u}$  et  $p$  désignent respectivement le vecteur de déplacement de la phase solide et la pression interstitielle du milieu poroélastique, et  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^s$  représente le tenseur de contraintes *in vacuo* du matériau poreux. Le tenseur  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^s$  est relié au tenseur de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}^t$  du

matériau par la relation suivante :  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^s = \underline{\underline{\sigma}}^t + \phi \left( 1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \underline{\underline{1}}$  où  $\phi$  est la porosité du matériau,  $\tilde{Q}$  est

un coefficient de couplage élastique entre les deux phases,  $\tilde{R}$  peut être interprétée comme étant le module de compression de l'air occupant une fraction  $\phi$  d'une unité de volume global [1], et  $\underline{\underline{1}}$  désigne la matrice unité. Il faut noter que l'amortissement structural dans le squelette est pris en compte dans  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^s$  via un module de Young complexe  $E(1 + j\eta)$ . Le terme  $\tilde{\rho}_{22}$  est la densité de Biot modifiée de la phase fluide, qui prend en compte la dissipation visqueuse. Ce terme peut s'écrire sous la forme  $\tilde{\alpha}\phi\rho_0$  où  $\tilde{\alpha}$  représente la tortuosité dynamique du matériau. Cette densité s'exprime en fonction de la densité apparente de la phase solide  $\tilde{\rho}_{11}$  et du coefficient de couplage massique  $\tilde{\rho}_{12}$  entre les deux phases, par la relation  $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_{11} - \frac{\tilde{\rho}_{12}^2}{\tilde{\rho}_{22}}$ , où  $\tilde{\rho}$  est une densité modifiée.

Le terme  $\tilde{\gamma}$  est défini sous la forme  $\tilde{\gamma} = \phi \left[ \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} - \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right]$ . Il faut noter que pour des matériaux

typiques d'absorption sonore, on a la relation  $\phi \left( 1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \approx 1$  [1]. Notons également que puisque  $\tilde{Q} \approx (1 - \phi)\tilde{K}_{\text{eff}}$  et  $\tilde{R} \approx \phi\tilde{K}_{\text{eff}}$ , où  $\tilde{K}_{\text{eff}}$  dénote le module d'incompressibilité dynamique complexe du fluide contenu dans les pores, le rapport  $\frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}}$  est réel.

## ANNEXE B : FORMULATION FAIBLE $\{u,p\}$ PAR ÉLÉMENTS FINIS DES ÉQUATIONS DE BIOT-ALLARD-JOHNSON

### *Formulation $\{u,p\}$ classique*

En multipliant les deux équations de la poroélasticité (A.1) par les variations cinématiquement admissibles  $\delta \underline{u}$  et  $\delta p$  du déplacement de la phase solide et de la pression dans les pores, on obtient après quelques manipulations algébriques, la formulation faible  $\{u,p\}$  [3] :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_p} [\underline{\underline{\sigma}}^s(\underline{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}^s(\delta \underline{u}) - \tilde{\rho} \omega^2 \underline{u} \cdot \delta \underline{u}] d\Omega - \tilde{\gamma} \int_{\Omega_p} \delta(\nabla p \underline{u}) d\Omega + \int_{\Omega_p} \left[ \frac{\phi}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} \nabla p \cdot \nabla \delta p - \frac{\phi^2}{\tilde{R}} p \delta p \right] d\Omega \\ & - \int_{\Omega_p} [\underline{\underline{\sigma}}^s(\underline{u}) \cdot \underline{n}] \delta \underline{u} dS + \int_{\partial \Omega_p} \left[ \tilde{\gamma} \underline{u} \cdot \underline{n} - \frac{\phi^2}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} \frac{\partial p}{\partial n} \right] \delta p dS = 0 \quad \forall (\delta \underline{u}, \delta p) \end{aligned} \quad (B.1)$$

où  $\Omega_p$  et  $\partial \Omega_p$  représentent le volume occupé par le domaine poroélastique et sa frontière.  $\underline{n}$  représente la normale sortante au sous-domaine. Les champs de déplacement et de pression dans le matériau poreux constituant la réponse de ce matériau à une sollicitation doivent vérifier l'équation (B.1). La première intégrale de volume représente la somme des travaux développés dans le déplacement virtuel du champ associé à  $\delta \underline{u}$  par les forces internes et inertielles dans la phase solide du milieu poreux. La seconde intégrale de volume représente le travail développé dans le déplacement virtuel du champ associé à  $\delta \underline{u}$  et  $\delta p$  par les forces de couplage entre la phase solide et la phase fluide du milieu poreux. La troisième intégrale de volume représente le travail développé dans le déplacement virtuel du champ associé  $\delta p$  par les forces internes internes et inertielles dans la phase fluide du milieu poreux. Les deux intégrales de surface représentent respectivement le travail des forces de surface agissant sur la phase solide dans le déplacement virtuel du champ associé à  $\delta \underline{u}$  et le travail virtuel de la pression interne à la frontière du domaine acoustique, par suite de l'imposition d'un mouvement sur la surface de ce domaine. L'interprétation de l'équation (B.1) est facilitée par réécriture des termes de surface :

$$\underline{\underline{\sigma}}^s = \underline{\underline{\sigma}}^t + \phi \left( 1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) p \underline{\underline{I}} \quad (B.2)$$

et

$$\tilde{\gamma} \underline{u} \cdot \underline{n} - \frac{\phi^2}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} \frac{\partial p}{\partial n} = -\phi \left( 1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \underline{u} \cdot \underline{n} - \phi (\underline{U} \cdot \underline{n} - \underline{u} \cdot \underline{n}) \quad (B.3)$$

où  $\underline{U}$  dénote le déplacement de la phase fluide. On obtient finalement :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_p} [\underline{\underline{\sigma}}^s(\underline{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}^s(\delta \underline{u}) - \tilde{\rho} \omega^2 \underline{u} \cdot \delta \underline{u}] d\Omega - \tilde{\gamma} \int_{\Omega_p} \delta(\nabla p \underline{u}) d\Omega + \int_{\Omega_p} \left[ \frac{\phi}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} \nabla p \cdot \nabla \delta p - \frac{\phi^2}{\tilde{R}} p \delta p \right] d\Omega \\ & - \int_{\Omega_p} [\underline{\underline{\sigma}}^t \cdot \underline{n}] \delta \underline{u} dS - \int_{\Omega_p} \phi \left( 1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \delta(p \underline{u} \cdot \underline{n}) dS - \int_{\Omega_p} \phi (\underline{U} \cdot \underline{n} - \underline{u} \cdot \underline{n}) \delta p dS = 0 \quad \forall (\delta \underline{u}, \delta p) \end{aligned} \quad (B.4)$$

Cette formulation est généralement utilisée en supposant que  $\phi\left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}}\right) \approx 1$ , et on a alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^p} [\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^s(\underline{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}^s(\delta\underline{u}) - \tilde{\rho}\omega^2 \underline{u} \cdot \delta\underline{u}] d\Omega - \tilde{\gamma} \int_{\Omega^p} \delta(\nabla p \underline{u}) d\Omega + \int_{\Omega^p} \left[ \frac{\phi}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} \nabla p \cdot \nabla \delta p - \frac{\phi^2}{\tilde{R}} p \delta p \right] d\Omega \\ - \int_{\partial\Omega^p} [\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^t \cdot \underline{n}] \delta \underline{u} dS - \int_{\partial\Omega^p} \delta(p \underline{u} \cdot \underline{n}) dS - \int_{\partial\Omega^p} \phi(\underline{U} \cdot \underline{n} - \underline{u} \cdot \underline{n}) \delta p dS = 0 \quad \forall (\delta\underline{u}, \delta p) \end{aligned} \quad (B.5)$$

Sous cette dernière forme, cette formulation est appropriée pour le cas de poreux contenant des hétérogénéités poroélastiques ou fluides. En effet dans ce cas, les termes de couplage de surface sont nuls et seules les conditions de couplage cinématiques doivent être imposées (continuité des pressions dans le cas de poreux et fluides en contact et continuité des pressions et des déplacements dans le cas de poreux de nature différente en contact).

### *Formulation {u,p} modifiée*

La formulation {u,p} classique (B.5) est adaptée au cas d'inclusions fluides ou poroélastiques. Cependant dans le cas d'inclusions solides, les termes de couplage surfacique sont non nuls et obligent une gestion complexe au niveau informatique des interfaces entre patches. Ceci peut être évité par une modification de l'équation (B.4). Une intégration par partie permet de réécrire l'équation (B.4) sous la forme :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^p} [\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^s(\underline{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}^s(\delta\underline{u}) - \tilde{\rho}\omega^2 \underline{u} \cdot \delta\underline{u}] d\Omega - \left[ \tilde{\gamma} + \phi \left( 1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \right] \int_{\Omega^p} \delta(\nabla p \underline{u}) d\Omega + \int_{\Omega^p} \left[ \frac{\phi}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} \nabla p \cdot \nabla \delta p - \frac{\phi^2}{\tilde{R}} p \delta p \right] d\Omega \\ - \phi \left( 1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \int_{\Omega^p} \delta(p \nabla \cdot \underline{u}) d\Omega - \int_{\partial\Omega^p} [\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^t \cdot \underline{n}] \delta \underline{u} dS - \int_{\partial\Omega^p} \phi(\underline{U} \cdot \underline{n} - \underline{u} \cdot \underline{n}) \delta p dS = 0 \quad \forall (\delta\underline{u}, \delta p) \end{aligned} \quad (B.6)$$

Cette formulation permet le couplage naturel entre des éléments poroélastiques de nature différente et des éléments poroélastiques et des éléments solides. Il n'y a pas d'intégrales de couplage à calculer dans ce cas et seules les conditions de couplage cinématiques doivent être imposées par exemple au niveau de l'assemblage.

### *Cas du fluide équivalent*

Comme cela a été mentionné dans l'introduction, pour des couches peu épaisses et en basses fréquences, il peut être supposé que le squelette du matériau poreux est immobile, (c'est-à-dire que  $\underline{u} = 0$ ). Dans ce cas, le matériau poreux est équivalent à un fluide. Les propriétés acoustiques du matériau poreux sont alors complètement définies par une série de deux caractéristiques acoustiques (qui sont pour l'instant la densité effective  $\tilde{\rho}_{22}$  et le module de compression  $\tilde{R}$ ). En supposant donc que  $\underline{u} = 0$ , l'équation (A.1) est simplifiée sous la forme :

$$\Delta p + \omega^2 \frac{\tilde{\rho}_{22}}{\tilde{R}} p = 0 \quad (B.3)$$

et la forme intégrale faible associée est donnée par la relation :

$$\int_{\Omega^p} \left[ \frac{\phi}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} \nabla \mathbf{p} \cdot \nabla \delta \mathbf{p} - \frac{\phi^2}{\tilde{R}} \mathbf{p} \delta \mathbf{p} \right] d\Omega - \int_{\partial\Omega^p} \frac{\phi^2}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{n}} \delta \mathbf{p} dS = 0 \quad \forall \delta \mathbf{p} \quad (\text{B.4})$$

## ANNEXE C : FORMULATION FAIBLE PAR ÉLÉMENTS FINIS D'UN MILIEU FLUIDE ET D'UN MILIEU SOLIDE

### *Milieu fluide*

La propagation des ondes acoustiques dans un milieu fluide, de densité  $\rho_0$  et de vitesse du son  $c$ , occupant un volume  $\Omega_p$  et de frontière  $\partial\Omega_p$  est régie par l'équation de Helmholtz :

$$\Delta p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \quad (C.1)$$

et la forme intégrale faible associée est donnée par la relation :

$$\int_{\Omega^p} \left[ \underline{\nabla} p \cdot \underline{\nabla} \delta p - \frac{\omega^2}{c^2} p \delta p \right] d\Omega - \int_{\partial\Omega^p} \frac{1}{\omega^2 \rho_0} \frac{\partial p}{\partial n} \delta p dS = 0 \quad \forall \delta p \quad (C.2)$$

### *Milieu solide*

La propagation des ondes dans un milieu solide, de densité  $\rho$ , occupant un volume  $\Omega_p$  et de frontière  $\partial\Omega_p$  est régie par l'équation:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \omega^2 \rho \underline{u} = 0 \quad (C.3)$$

et la forme intégrale faible associée est donnée par la relation :

$$\int_{\Omega^p} \left[ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\delta \underline{u}) - \rho \omega^2 \underline{u} \cdot \delta \underline{u} \right] d\Omega - \int_{\partial\Omega^p} \left[ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) \cdot \underline{n} \right] \delta \underline{u} dS \quad \forall (\delta \underline{u}) \quad (C.4)$$

## ANNEXE D : COUPLAGE ENTRE UN MATÉRIAU POROÉLASTIQUE ET DES HÉTÉROGÉNÉITÉS DE NATURE FLUIDE, SOLIDE ET POROÉLASTIQUE

### *Cas du couplage entre poreux et milieu fluide*

Soit  $p^a$  la pression dans le milieu fluide. Les équations traduisant le couplage entre un matériau poroélastique décrit par les variables  $(\underline{u}, p, \underline{U})$  et un fluide sont données par :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^t = -p^a \underline{\underline{I}} \\ p = p^a \\ (1 - \phi)\underline{u} \cdot \underline{n} + \phi \underline{U} \cdot \underline{n} = \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial p^a}{\partial n} \end{cases} \quad (D.1)$$

Dans ce cas, on constate que l'addition des termes de surface de la formulation  $\{u, p\}$  classique donnés par (B.5) et de ceux de la formulation (C.2) donne zéro. Le couplage est donc naturel et il n'y a pas d'intégrales de couplage à calculer. Seule la continuité de la pression des milieux fluides et poroélastiques doit être imposée au niveau de l'interface. La formulation classique  $\{u, p\}$  est donc appropriée pour traiter ce type d'hétérogénéité. La formulation  $\{u, p\}$  modifiée donnerait lieu au calcul d'une matrice de couplage qui alourdirait les calculs.

### *Cas du couplage entre poreux et milieu solide*

Soit  $\underline{u}^e$  le déplacement du milieu solide. Les équations traduisant le couplage entre un matériau poroélastique décrit par les variables  $(\underline{u}, p, \underline{U})$  et un solide sont données par:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^t \cdot \underline{n} = \underline{\underline{\sigma}}^e \cdot \underline{n} \\ \underline{U} \cdot \underline{n} - \underline{u} \cdot \underline{n} = 0 \\ \underline{u} = \underline{u}^e \end{cases} \quad (D.2)$$

Dans ce cas, on constate que l'addition des termes de surface de la formulation  $\{u, p\}$  modifiée donnés par (B.6) et de ceux de la formulation (C.4) donne zéro. Le couplage est donc naturel et il n'y a pas d'intégrales de couplage à calculer. Seule la continuité du déplacement du milieu solide et du déplacement du milieu poroélastique doit être imposée au niveau de l'interface. La formulation  $\{u, p\}$  modifiée est donc appropriée pour traiter ce type d'hétérogénéité. La formulation  $\{u, p\}$  classique donnerait lieu au calcul d'une matrice de couplage qui alourdirait les calculs.

### *Cas du couplage entre deux milieux poroélastiques différents*

Soit  $(\underline{u}^1, p^1, \underline{U}^1)$  les variables du milieu poroélastique 1 et  $(\underline{u}^2, p^2, \underline{U}^2)$  les variables du milieu poroélastique 2. Les équations traduisant le couplage entre ces deux matériaux poroélastiques sont données par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}}^{1,t} \cdot \underline{n} = \underline{\underline{\sigma}}^{2,t} \cdot \underline{n} \\ \phi_1(\underline{U}^1 \cdot \underline{n} - \underline{u}^1 \cdot \underline{n}) = \phi_2(\underline{U}^2 \cdot \underline{n} - \underline{u}^2 \cdot \underline{n}) \\ p^1 = p^2 \\ \underline{u}^1 = \underline{u}^2 \end{array} \right. \quad (D.3)$$

Dans ce cas, on constate que l'addition des termes de surface de la formulation  $\{u, p\}$  classique donnés par (B.5) (ou modifiée donnés par (B.6)) pour les deux poreux donne zéro. Le couplage est donc naturel et il n'y a pas d'intégrales de couplage à calculer. Seule la continuité du déplacement et de la pression doit être imposée au niveau de l'interface. Les deux formulations  $\{u, p\}$  classique et modifiée sont donc appropriées pour traiter ce type d'hétérogénéité.

## ANNEXE E : MODÉLISATION D'UN MATÉRIAU POREUX DANS UN GUIDE D'ONDE

On détaille ici la prise en compte du couplage entre le guide d'onde et un matériau poreux décrit par les formulations (B.5) et (B.6). Dans ce qui suit,  $\partial\Omega_p$  dénote l'interface entre le guide d'onde et le matériau poreux.

Soit  $p^a$  la pression dans le guide d'onde. Les conditions aux limites pour un matériau poreux en contact avec le guide d'onde sont données par :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^t = -p^a \underline{\underline{I}} \\ p = p^a \\ (1-\phi)\underline{u}\cdot\underline{n} + \phi\underline{U}\cdot\underline{n} = \frac{1}{\rho_0\omega^2} \frac{\partial p^a}{\partial n} \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

### Formulation $\{u,p\}$ classique

Dans ce cas, le terme de frontière dans l'équation (B.5) devient :

$$\begin{aligned} - \int_{\partial\Omega^p} \underline{\underline{\sigma}}^t \cdot \underline{n} \delta \underline{u} dS - \int_{\partial\Omega^p} \delta(p \underline{u} \cdot \underline{n}) dS - \int_{\partial\Omega^p} \phi(\underline{U} \cdot \underline{n} - \underline{u} \cdot \underline{n}) \delta p dS = \\ \int_{\partial\Omega^p} p \delta(\underline{u} \cdot \underline{n}) dS - \int_{\partial\Omega^p} \delta(p \underline{u} \cdot \underline{n}) dS - \int_{\partial\Omega^p} \frac{1}{\rho_0\omega^2} \frac{\partial p^a}{\partial n} \delta p dS + \int_{\partial\Omega^p} \underline{u} \cdot \underline{n} \delta p dS = - \int_{\partial\Omega^p} \frac{1}{\rho_0\omega^2} \frac{\partial p^a}{\partial n} \delta p dS \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Pour calculer ce terme de surface qui traduit le couplage entre guide d'onde et poreux, la pression  $p^a$  est écrite comme la somme d'une pression bloquée  $p_b$  et d'une pression  $p_{\text{rad}}$  rayonnée à partir de la surface du patchwork :

$$p^a = p_b + p_{\text{rad}} \quad (\text{E.3})$$

Pour une excitation du mode normal d'amplitude  $p_0$ , la pression bloquée  $p_b$  est égale à  $2p_0$ . La pression rayonnée peut être exprimée en termes de modes normaux orthogonaux dans le guide d'onde :

$$p_{\text{rad}}(\underline{x}) = \sum_{m,n} B_{mn} \varphi_{mn}(x_1, x_2) e^{jk_{mn}x_3} \quad (\text{E.4})$$

où les  $B_{mn}$  représentent les amplitudes obtenues des propriétés d'orthogonalité des modes. Pour un guide d'onde de section rectangulaire  $L_1 \times L_2$ , on a :

$$\varphi_{mn}(x_1, x_2) = \cos\left(\frac{m\pi}{L_1}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L_2}\right) \quad (\text{E.5})$$

On a

$$\int_{\partial\Omega^p} p_{\text{rad}} \varphi_{mn}(x_1, x_2) dS_x = \int_{\partial\Omega^p} (p - p_b) \varphi_{mn}(x_1, x_2) dS_x \quad (\text{E.6})$$

qui conduit à :

$$B_{mn} = \frac{1}{N_{mn}} \int_{\partial\Omega^p} (p - p_b) \varphi_{mn} dS \quad (E.7)$$

avec  $N_{mn}$  qui est la norme du mode  $(m, n)$  :

$$N_{mn} = \int_{\partial\Omega^p} |\varphi_{mn}|^2 dS \quad (E.8)$$

En exploitant les équations (E.4) et (E.5), le déplacement normal à l'interface entre le patchwork et l'air (position  $x_3 = 0$ ) peut être écrit sous la forme :

$$\frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial p^a}{\partial n}(\underline{x}) = \frac{1}{j\omega} \int_{\partial\Omega^p} A(\underline{x}, \underline{y})(p(\underline{y}) - p_b(\underline{y})) dS_y \quad (E.9)$$

où  $\underline{A}$  est l'opérateur d'admittance suivant :

$$A(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{m,n} \frac{k_{mn}}{\rho_0 \omega N_{mn}} \varphi_{mn}(\underline{x}) \varphi_{mn}(\underline{y}) \quad (E.10)$$

Finalement, le terme de couplage de frontière devient :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega^p} \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial p^a}{\partial n} \delta p dS &= \frac{1}{j\omega} \int_{\partial\Omega^p} \int_{\partial\Omega^p} A(\underline{x}, \underline{y}) p(\underline{y}) \delta p(\underline{x}) dS_y dS_x \\ &- \frac{1}{j\omega} \int_{\partial\Omega^p} \int_{\partial\Omega^p} A(\underline{x}, \underline{y}) p_b(\underline{y}) \delta p(\underline{x}) dS_y dS_x \end{aligned} \quad (E.11)$$

Cette forme a l'avantage de représenter le couplage avec le guide d'onde en termes d'admittance de rayonnement et de charge de pression bloquée. Il faut noter qu'en basses fréquences (en dessous de la fréquence de coupure du guide d'onde), des modes plus élevés conduisent à un opérateur d'admittance purement imaginaire de type inertance. L'intérêt de cette modélisation est qu'on ramène l'effet du guide d'onde à une matrice d'admittance sur les degrés de liberté en pression du poreux. On n'ajoute donc pas de degrés de liberté supplémentaires.

### ***Formulation $\{u, p\}$ modifiée***

Dans ce cas, le terme de frontière dans l'équation (B.5) devient :

$$\begin{aligned} - \int_{\partial\Omega^p} [\underline{\sigma}^t \cdot \underline{n}] \delta \underline{u} dS - \int_{\partial\Omega^p} \phi(\underline{U} \cdot \underline{n} - \underline{u} \cdot \underline{n}) \delta p dS = \\ \int_{\partial\Omega^p} p \delta(\underline{u} \cdot \underline{n}) dS - \int_{\partial\Omega^p} \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial p^a}{\partial n} \delta p dS + \int_{\partial\Omega^p} \underline{u} \cdot \underline{n} \delta p dS = - \int_{\partial\Omega^p} \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial p^a}{\partial n} \delta p dS + \int_{\partial\Omega^p} \delta(p \underline{u} \cdot \underline{n}) dS \end{aligned} \quad (E.12)$$

On a donc le même terme de surface à calculer que pour la formulation  $\{u, p\}$  classique auquel il faut rajouter un terme de couplage surfacique entre la pression interstitielle et le déplacement normal.

## ANNEXE F : CALCUL DES INDICATEURS VIBRO-ACOUSTIQUES

### F.1 Puissances dissipées

Dans cette section, les expressions des puissances dissipées à travers les différents mécanismes qui gouvernent la dissipation dans les milieux poreux, sont calculées pour les différentes formulations. Le calcul des puissances dissipées dans les milieux élastiques et acoustiques sont classiques et peuvent être trouvées dans la référence [13].

#### *Formulation {u,p} classique*

Pour faciliter l'interprétation du bilan de puissance associé au poreux, la formulation (B.4) est légèrement modifiée en ajoutant et retranchant le terme

$$\phi \left( 1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \int_{\Omega^p} \delta(\nabla p \cdot \underline{u}) d\Omega \quad (\text{F.1})$$

De plus, en remarquant que

$$\tilde{\gamma} + \phi \left( 1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) = \frac{\phi}{\tilde{\alpha}} \quad (\text{F.2})$$

où  $\tilde{\alpha}$  représente la tortuosité dynamique (associée aux effets visqueux), on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^p} \left[ \underline{\underline{\sigma}}^s(\underline{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}^s(\delta \underline{u}) - \tilde{\rho} \omega^2 \underline{u} \cdot \delta \underline{u} \right] d\Omega - \frac{\phi}{\tilde{\alpha}} \int_{\Omega^p} \delta(\nabla p \cdot \underline{u}) d\Omega + \phi \left( 1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \int_{\Omega^p} \delta(\nabla p \cdot \underline{u}) d\Omega \\ & + \int_{\Omega^p} \left[ \frac{\phi}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} \nabla p \cdot \nabla \delta p - \frac{\phi^2}{\tilde{R}} p \delta p \right] d\Omega \quad (\text{F.3}) \\ & - \int_{\partial \Omega^p} \left[ \underline{\underline{\sigma}}^t \cdot \underline{n} \right] \delta \underline{u} dS - \int_{\partial \Omega^p} \phi \left( 1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \delta(p \underline{u} \cdot \underline{n}) dS - \int_{\partial \Omega^p} \phi (\underline{U} \cdot \underline{n} - \underline{u} \cdot \underline{n}) \delta p dS = 0 \quad \forall (\delta \underline{u}, \delta p) \end{aligned}$$

En substituant dans l'équation (F.3) un couple de fonctions admissibles choisies sous la forme  $-j\omega \underline{u}^*$  et  $-j\omega p^*$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
& \underbrace{-j\omega \int_{\Omega^p} [\underline{\tilde{\sigma}}^s(\underline{u}) : \underline{\varepsilon}^s(\underline{u}^*)] d\Omega}_{\Pi_{\text{elas}}^s} + j\omega^3 \int_{\Omega_p} \tilde{\rho} \underline{u} \cdot \underline{u}^* d\Omega \quad \Pi_{\text{iner}}^s \\
& + j\omega \frac{\phi}{\tilde{\alpha}} \int_{\Omega^p} (\nabla p \cdot \underline{u}^* + \nabla p^* \cdot \underline{u}) d\Omega - j\omega\phi \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}}\right) \int_{\Omega^p} (\nabla p \cdot \underline{u}^* + \nabla p^* \cdot \underline{u}) d\Omega \quad \Pi_{\text{coup}}^{\text{fs}} \\
& \underbrace{-j \int_{\Omega_p} \frac{\phi}{\omega \tilde{\rho}_{22}} \nabla p \cdot \nabla p^* d\Omega}_{\Pi_{\text{iner}}^f} + j\omega \int_{\Omega_p} \frac{\phi^2}{\tilde{R}} p \cdot p^* d\Omega \quad \Pi_{\text{elas}}^f \\
& + j\omega\phi \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}}\right) \int_{\partial\Omega^p} (p \underline{u}^* \cdot \underline{n} + p^* \underline{u} \cdot \underline{n}) dS + j\omega \int_{\partial\Omega^p} [\underline{\sigma}^t \cdot \underline{n}] \underline{u}^* dS + j\omega \int_{\partial\Omega^p} \phi (\underline{U} \cdot \underline{n} - \underline{u} \cdot \underline{n}) p^* dS = 0 \quad -\Pi_{\text{ech}}
\end{aligned} \tag{F.4}$$

Cette relation fournit l'équation d'équilibre des puissances :

$$\Pi_{\text{elas}}^s + \Pi_{\text{iner}}^s + \Pi_{\text{elas}}^f + \Pi_{\text{iner}}^f + \Pi_{\text{coup}}^{\text{fs}} - \Pi_{\text{ech}} = 0 \tag{F.5}$$

où  $\Pi_{\text{elas}}^s$ ,  $\Pi_{\text{iner}}^s$ ,  $\Pi_{\text{elas}}^f$ ,  $\Pi_{\text{iner}}^f$ ,  $\Pi_{\text{coup}}^{\text{fs}}$  désignent respectivement les puissances développées par les forces élastiques et inertielles dans la phase solide et la phase fluide, la puissance développée par les forces de couplage volumique entre les deux phases et  $\Pi_{\text{ech}}$  est la puissance échangée à travers l'interface entre le milieu poreux et son environnement (guide d'onde, autres matériaux).

La moyenne temporelle de la puissance dissipée à l'intérieur du système est de la forme :

$$\frac{1}{2} \Re \left[ -j\omega\phi \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}}\right) \int_{\partial\Omega^p} 2\Re(p \underline{u}^* \cdot \underline{n}) dS - j\omega \int_{\partial\Omega^p} [\underline{\sigma}^t \cdot \underline{n}] \underline{u}^* dS - j\omega \int_{\partial\Omega^p} \phi [\underline{U} \cdot \underline{n} - \underline{u} \cdot \underline{n}] p^* dS \right] \tag{F.6}$$

qui se réécrit

$$\frac{1}{2} \Re \left[ -j\omega \int_{\partial\Omega^p} [\underline{\sigma}^t \cdot \underline{n}] \underline{u}^* dS - j\omega \int_{\partial\Omega^p} \phi [\underline{U} \cdot \underline{n} - \underline{u} \cdot \underline{n}] p^* dS \right] \tag{F.7}$$

car  $\frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}}$  est supposé réel. Elle peut être subdivisée en trois contributions de puissances dissipées provenant des effets visqueux et thermiques et de l'amortissement structural dans le squelette,  $\Pi_{\text{diss}} = \Pi_{\text{diss}}^s + \Pi_{\text{diss}}^v + \Pi_{\text{diss}}^t$ . La moyenne temporelle de la puissance dissipée via les effets visqueux est obtenue à partir de  $\Pi_{\text{elas}}^s$  :

$$\Pi_{\text{diss}}^s = \frac{1}{2} \Im \left[ \omega \int_{\Omega^p} [\underline{\tilde{\sigma}}^s(\underline{u}) : \underline{\varepsilon}^s(\underline{u}^*)] d\Omega \right] \tag{F.8}$$

La moyenne temporelle de la puissance dissipée via les effets visqueux est obtenue à partir de  $\Pi_{\text{iner}}^s$ ,  $\Pi_{\text{iner}}^f$  et  $\Pi_{\text{coup}}^{\text{fs}}$ , à savoir :

$$\Pi_{\text{diss}}^v = \frac{1}{2} \Im \left[ -\omega^3 \int_{\Omega_p} \tilde{\rho} \underline{u} \cdot \underline{u}^* d\Omega + \int_{\Omega_p} \frac{\phi}{\omega \tilde{\rho}_{22}} \nabla p \cdot \nabla p^* d\Omega - 2\omega \frac{\phi}{\tilde{\alpha}} \int_{\Omega_p} \Re(\nabla p \cdot \underline{u}^*) d\Omega \right] \quad (\text{F.9})$$

Notons que cette expression peut se réécrire sous la forme

$$\Pi_{\text{diss}}^v = \frac{1}{2} \Im \left[ -\omega^3 \int_{\Omega_p} \tilde{\rho} \underline{u} \cdot \underline{u}^* d\Omega + \int_{\Omega_p} \frac{\phi}{\omega \tilde{\rho}_{22}} \nabla p \cdot \nabla p^* d\Omega - 2\omega \tilde{\gamma} \int_{\Omega_p} \Re(\nabla p \cdot \underline{u}^*) d\Omega \right] \quad (\text{F.10})$$

puisque  $\Im \left[ \frac{\phi}{\tilde{\alpha}} \right] = \Im \left[ \tilde{\gamma} + \phi \left( 1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \right] = \Im[\tilde{\gamma}]$  puisque  $\frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}}$  est supposé réel.

La puissance dissipée via les effets thermiques est obtenue à partir de  $\Pi_{\text{elas}}^f$  et  $\Pi_{\text{coup}}^{\text{fs}}$ , à savoir :

$$\Pi_{\text{diss}}^t = \frac{1}{2} \Im \left[ \omega \phi \left( 1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \int_{\Omega_p} 2\Re(\nabla p \cdot \underline{u}^*) d\Omega - \omega \int_{\Omega_p} \frac{\phi^2}{\tilde{R}} p \cdot p^* d\Omega \right] \quad (\text{F.11})$$

Du fait que  $\frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}}$  est supposé réel, cette expression devient :

$$\Pi_{\text{diss}}^t = \frac{1}{2} \Im \left[ -\omega \int_{\Omega_p} \frac{\phi^2}{\tilde{R}} p \cdot p^* d\Omega \right] \quad (\text{F.12})$$

### ***Formulation {u,p} modifiée***

La formulation (B.4) peut être réécrite en fonction de la tortuosité dynamique sous la forme :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_p} \left[ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^s(\underline{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}^s(\delta \underline{u}) - \tilde{\rho} \omega^2 \underline{u} \cdot \delta \underline{u} \right] d\Omega - \frac{\phi}{\tilde{\alpha}} \int_{\Omega_p} \delta(\nabla p \cdot \underline{u}) d\Omega + \int_{\Omega_p} \left[ \frac{\phi}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} \nabla p \cdot \nabla \delta p - \frac{\phi^2}{\tilde{R}} p \delta p \right] d\Omega \\ & - \phi \left( 1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \int_{\Omega_p} \delta(p \nabla \cdot \underline{u}) d\Omega - \int_{\partial \Omega_p} \left[ \underline{\underline{\sigma}}^t \cdot \underline{n} \right] \delta \underline{u} dS - \int_{\partial \Omega_p} \phi (\underline{U} \cdot \underline{n} - \underline{u} \cdot \underline{n}) \delta p dS = 0 \quad \forall (\delta \underline{u}, \delta p) \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

En procédant comme pour la formulation classique, le bilan de puissances s'écrit :

$$\begin{aligned}
& -j\omega \underbrace{\int_{\Omega^p} \underline{\underline{\sigma}}^s(\underline{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}^s(\underline{u}^*) d\Omega}_{\Pi_{\text{elas}}^s} + j\omega^3 \underbrace{\int_{\Omega^p} \tilde{\rho} \underline{u} \cdot \underline{u}^* d\Omega}_{\Pi_{\text{iner}}^s} \\
& + j\omega \frac{\phi}{\alpha} \underbrace{\int_{\Omega^p} (\underline{\nabla} p \cdot \underline{u}^* + \underline{\nabla} p^* \cdot \underline{u}) d\Omega}_{\Pi_{\text{coup}}^{\text{fs}}} + j\omega \phi \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}}\right) \int_{\Omega^p} (p \underline{\nabla} \cdot \underline{u}^* + p^* \underline{\nabla} \cdot \underline{u}) d\Omega \\
& - j \underbrace{\int_{\Omega^p} \frac{\phi}{\omega \tilde{\rho}_{22}} \underline{\nabla} p \cdot \underline{\nabla} p^* d\Omega}_{\Pi_{\text{iner}}^f} + j\omega \underbrace{\int_{\Omega^p} \frac{\phi^2}{\tilde{R}} p \cdot p^* d\Omega}_{\Pi_{\text{elas}}^f} \\
& + j\omega \underbrace{\int_{\partial\Omega^p} \underline{\underline{\sigma}}^t \cdot \underline{n} \underline{u}^* dS}_{-\Pi_{\text{ech}}} + j\omega \int_{\partial\Omega^p} \phi (\underline{U} \cdot \underline{n} - \underline{u} \cdot \underline{n}) p^* dS = 0
\end{aligned} \tag{F.14}$$

En utilisant le fait que  $\frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}}$  est réel et que par conséquent  $\Re \left[ j\omega \phi \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}}\right) \int_{\Omega^p} 2\Re(p \underline{\nabla} \cdot \underline{u}^*) d\Omega \right] = 0$ , on retrouve les expressions des puissances dissipées de la formulation classique.

### ***Formulation fluide équivalent***

En substituant dans l'équation (B.4) une fonction admissible choisie sous la forme  $-j\omega p^*$ , on obtient

$$\underbrace{-j \int_{\Omega^p} \frac{\phi}{\omega \tilde{\rho}_{22}} \underline{\nabla} p \cdot \underline{\nabla} p^* d\Omega}_{\Pi_{\text{iner}}^f} + \underbrace{j\omega \int_{\Omega^p} \frac{\phi^2}{\tilde{R}} p p^* d\Omega}_{\Pi_{\text{elas}}^f} + \underbrace{j \int_{\partial\Omega^p} \frac{\phi^2}{\omega \tilde{\rho}_{22}} \frac{\partial p}{\partial n} p^* dS}_{-\Pi_{\text{ech}}^f} = 0 \tag{F.15}$$

La moyenne temporelle de la puissance dissipée à l'intérieur du système est de la forme :

$$\frac{1}{2} \Im \left[ - \int_{\Omega^p} \frac{\phi^2}{\omega \tilde{\rho}_{22}} \frac{\partial p}{\partial n} p^* dS \right] \tag{F.16}$$

Elle peut être subdivisée en deux contributions de puissances dissipées provenant des effets visqueux et thermiques,  $\Pi_{\text{diss}} = \Pi_{\text{diss}}^v + \Pi_{\text{diss}}^t$ . La moyenne temporelle de la puissance dissipée via les effets visqueux est obtenue à partir de  $\Pi_{\text{iner}}^f$ , à savoir :

$$\Pi_{\text{diss}}^v = \frac{1}{2} \Im \left[ \int_{\Omega^p} \frac{\phi}{\omega \tilde{\rho}_{22}} \underline{\nabla} p \cdot \underline{\nabla} p^* d\Omega \right] \tag{F.17}$$

La puissance dissipée via les effets thermiques est obtenue à partir de  $\Pi_{\text{elas}}^f$ , à savoir :

$$\Pi_{\text{diss}}^t = \frac{1}{2} \Im \left[ -\omega \int_{\Omega^p} \frac{\phi^2}{\bar{R}} p p^* d\Omega \right] \quad (\text{F.18})$$

## F.2 Coefficient d'absorption

Pour caractériser la performance en absorption des patchworks 3-D utilisés, on définit le coefficient d'absorption en puissance sous la forme suivante :

$$\alpha = \frac{\Pi_{\text{diss}}}{\Pi_{\text{inc}}} = \frac{\Pi_{\text{diss}}^s + \Pi_{\text{diss}}^v + \Pi_{\text{diss}}^t}{\Pi_{\text{inc}}} \quad (\text{F.19})$$

où  $\Pi_{\text{inc}}$  est la puissance incidente. Dans le cas d'une excitation par une onde plane d'amplitude  $p_0$ , la puissance incidente est de la forme :

$$\Pi_{\text{inc}} = \frac{S |p_0|^2}{2\rho_0 c_0} \quad (\text{F.20})$$

où  $S$  désigne la section latérale du guide d'onde.

Dans le cas du fluide équivalent, le coefficient d'absorption est défini de façon similaire mais sans le terme  $\Pi_{\text{diss}}^s$ . Il faut noter qu'en basses fréquences (en dessous de la fréquence de coupure du guide d'onde), c'est seulement le mode d'ordre (0, 0) qui contribue à la partie réelle de l'admittance, et une expression simplifiée de la puissance dissipée peut être obtenue sous la forme :

$$\Pi_{\text{diss}} = \Pi_{\text{inc}} - \Pi_{\text{ref}} \quad (\text{F.21})$$

où la puissance réfléchie  $\Pi_{\text{ref}}$  est de la forme

$$\Pi_{\text{ref}} = \frac{S}{2\rho_0 c_0} \left[ |p_0|^2 - |p_{\text{avg}}|^2 + 2\Re(p_{\text{avg}})p_0 \right] \quad (\text{F.22})$$

avec  $p_{\text{avg}}$  qui désigne la pression moyennée sur la surface.

## F.3 Impédance de surface

Strictement parlant, la notion d'impédance de surface n'a pas de sens pour un patchwork non homogène : le patchwork ne peut pas être considéré comme étant à réaction localisée, il y a une variation transversale de la pression et de la vitesse normale à la surface du patchwork. Cela indique que le problème ne peut pas être correctement résolu si on retient seulement la propagation du mode (0, 0). Des modes évanescents d'ordre plus élevés doivent donc être pris en compte pour l'équation (7). Toutefois, une impédance moyenne peut être mesurée dans le tube de Kundt par des méthodes standard. En conséquence, une moyenne spatiale de l'impédance de surface peut être définie à une distance  $d$  dans le guide d'onde par :

$$Z_d = \frac{\int_{\partial\Omega^p} p(\underline{x}) dS_x}{\int_{\partial\Omega^p} v_n(\underline{x}) dS_x} \quad (\text{F.23})$$

où la pression et la vitesse normale sont calculées à partir des équations (6) et (11). L'impédance de surface  $Z_S$  est ensuite calculée par la relation classique suivante (valable pour les ondes planes)

$$Z_S = \frac{Z_d \cos(kd) + iZ_0 \sin(kd)}{Z_0 \cos(kd) + Z_d \sin(kd)} \quad (\text{F.24})$$

avec  $Z_0 = \rho_0 c_0$ .

#### **F.4 Perte par transmission**

La perte par transmission caractérise la performance du matériau à atténuer la transmission des sons. Elle est définie comme :

$$\text{TL} = -10 \log \left( \frac{\Pi_t}{\Pi_{\text{inc}}} \right) \quad (\text{F.25})$$

où  $\Pi_t$  dénote la puissance transmise du côté réception et  $\Pi_{\text{inc}}$  la puissance incidente qui traverserait la surface du matériau si ce dernier était infiniment absorbant.